2016 年复分析期中试题

整理：　张桐*

1、（4 分）判断下面命题是否正确，并详细说明理由或举出反例。

（1）对任意的 $z \neq 0$ 和 $w \in C$ ，有如下等式成立：

$$z^{2w} = z^w \cdot z^w$$

（2）设 u 为区域 Ω 上的调和函数，则存在 Ω 上的全纯函数 f，使得 $u = Ref$。

（3）单位圆盘 $D = \{|z| < 1\}$ 上的非零全纯函数在 D 中最多只能有有限个零点。

（4）设 $f(z)$ 为区域 Ω 上的非零值全纯函数，则 $|f(z)|$ 可以在 Ω 内部达到最小值。

2、（2 分）设 $f(z) = \sqrt{z^{-1}(1-z)^3(1+z)^{-1}}$，求 $f(z)$ 在扩充的复平面上的所有支点，并求 $f(z)$ 在 $[0,1]$ 上岸取正值的单值分支在点 $z = i$ 的值。

3、（2 分）

叙述有界单连通区域的柯西定理，并对三角形区域给出详细证明。

4、（2 分）计算题

（1）计算留数 $Res(\frac{e^z}{z^2-1}, \infty)$.

（2）计算积分

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^5-1)^3(z-3)}$$

5、（2 分）

（1）叙述亚纯函数的辐角原理。

（2）利用辐角原理证明：若 $F(z)$ 和 $G(z)$ 是区域 Ω 上的全纯函数，γ 是 Ω 中光滑简单闭曲线，且 γ 的内部属于 Ω。如果

$$|F(z) - G(z)| < |F(z)| + |G(z)|, \forall z \in \gamma$$

则 $F(z)$ 和 $G(z)$ 在 γ 内部的零点个数相同。

6、（2 分）设 $D = \{|z| < 1\}$，并设 f 在 $D \bigcup \{1\}$ 上全纯，并且 $f(D) \subset D$,$f(1) = 1$, 证明：$f^{'}(1) \geq 0$.

7、令 $M(r) = max_{|z|=r}|f(z)|$,$A(r) = max_{|z|=r}Ref(z)$.

（1）（2 分）设 $f(z)$ 在 $\{|z| < R\}$ 上全纯，在 $\{|z| \leq R\}$ 上连续，且 $f(0) = 0$，则有

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r}A(R), \forall r \in (0, R)$$

（2）（2 分）设 $f(z)$ 为整函数，∞ 为 $f(z)$ 的本性奇点，则对任何 $n \in N$，存在 $r_n > 0$，使得对任何的 $r > r_n$，都有 $M(r) \geq r^n$

（3）（1 分）设 $f(z)$ 为整函数，∞ 为 $f(z)$ 的本性奇点，求证：

$$\lim_{r \to \infty} \frac{logA(r)}{logr} = +\infty$$

8、（2 分）求所有 C 上的亚纯函数 $f(z)$，使得对任意 z 满足 $|z| = 1$ 都有 $|f(z)| = 1$.

---

*mail:zt001062@mail.ustc.edu.cn　　phone:18856017324