- $\mathbb{R}$ 表示实数全体，$\mathbb{C}$表示复数全体，i表示虚数单位。
- $z=x+iy$表示复数，其中x,y分别是z的实部与虚部；$\bar{z}=x-iy$表示z的共轭。
- 除第一题之外，所有问题的解答要有详细过程，直接写出答案者不得分。

16

一. (20分) 判断下列命题的对错，请直接将答案写在命题左侧的下划线上，不要解答过程.

1A. __×__ $\mathbb{C}$中区域上的调和函数一定有共轭调和函数.

1B. __×__ 若函数 $f(z)$ 在$\mathbb{C}$中的区域 Ω 上全纯，在 Ω 的闭包上连续，则对任何 $z\in\Omega$有

$$|f(z)|\leq \sup_{w\in\partial\Omega}|f(w)|.$$

5 1C. __✓__ 设f为有理函数，且∞是f的一阶零点. 那么f在$\mathbb{C}$ 上的所有留数之和等于零.

1D. __✓__ 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$的收敛半径等于1，在单位圆盘$\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$内定义出解析函数$f(z)$. 那么必有$z_0$，使得$|z_0|=1$，并且$f(z)$不能解析延拓到$z_0$的任何邻域上.

1E. __×__ 存在从上半平面$\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$到$\mathbb{C}$的共形一一对应.

24

二. (24分) 计算题，要求有详细解答过程，直接给出答案者不得分.

1. 求留数 $\operatorname{Res}\left(e^{\frac{1}{z}}\cdot z^5,0\right)$.
2. 利用留数定理计算积分$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+3x^2+2}dx$.
3. 求 $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$ 在 $0<|z|<1$ 和 $1<|z|<+\infty$ 的 Laurent 展开。
4. 设γ为闭曲线 $z(t)=4e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. 计算积分$\int_\gamma\frac{z^9}{z^{10}-1}dz$.

三. (6分) 设$f(z)$为$\mathbb{C}$中的区域Ω上的解析函数，且恒不为零. 证明: 实值函数 $\log|f(z)|$ 为 Ω上的调和函数.

四. (10分) 方程 $z^7-2z^5+2016z^3-z+1=0$ 在单位开圆盘$\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$内有多少个根? 要求详细说明理由，直接写出得数者不得分.

五. (10分) 证明 Weierstrass 定理: 设解析函数列$\{f_n\}$在区域$\Omega\subset\mathbb{C}$上内闭一致收敛，设k 为任意正整数，那么相应的k阶导函数列$\{f_n^{(k)}(z)\}$也在Ω上内闭一致收敛.

六. (10分) 求从区域$\Omega=\{z\in\mathbb{C}:z\neq 0, 0<\arg z<\pi/2\}$ 到单位圆盘$\{w\in\mathbb{C}:|w|<1\}$的共形一一对应$w=f(z)$，使得$f(e^{\pi i/4})=0$且$f'(e^{\pi i/4})>0$. 要求有详细解答过程，直接写出答案者不得分.

七. (10分) 设$f(z)$为单位开圆盘$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$上的解析函数，$|f(z)|\leq 1$，且$f$ 在$\mathbb{D}$ 内有两个不动点，i.e. 存在$z_1\neq z_2\in\mathbb{D}$，使得$f(z_1)=z_1, f(z_2)=z_2$. 利用 Schwarz 引理证明: 在$\mathbb{D}$ 内$f(z)\equiv z$.

八. (10分) 设$f(z)$为上半平面$\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Im}z>0\}$上恒不为零的解析函数，并且当$z\in\mathbb{H}$ 趋于实轴$\mathbb{R}$上的点时，$|f(z)|\to 1$.

8A. 证明$f(z)$可以延拓为整函数，仍然记作$f(z)$.

8B. 在8A 的条件下，假设∞不是$f(z)$的本性奇点. 证明$f(z)$为常值函数.

九. (10分) 设 $\Omega=\{0<|z|<1\}$. 设 f 在 Ω 上全纯，且

$$\iint_\Omega |f(z)|^2\,dxdy<+\infty.$$

证明: $z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点。

$\frac{1}{2}\lg(U^2+V^2)$

$\lg(U^2+V^2)$

$\frac{2UU_x+2VV_x}{U^2+V^2}$

$\left|\frac{f(z)-z}{2}\right|=1$

$g(z_1)=0.$

$\frac{|f^{(n)}|}{k!}$