中国科学技术大学2016-2017学年度第一学期期末考试
高等实分析

章俊彦　zhangjy9610@gmail.com

2017.1.11 14:30-16:30 闭卷考试

注：一切定义、约定、定理的陈述以课本为准。

一、定义题（30分） 1. 什么是逼近连续性(approximate continuity)?

2. 什么是isodiametric不等式?

3. 什么是一个线性映射的Jacobian?

二、验证性质（40分）

1. （10分）求证：教材上定义的Hausdorff（外）测度是Borel（外）测度.

2. （10分）设$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$是$\mathbb{R}^n$上紧支于单位球上的光滑函数，且$\|f_k\|_{W^{1,p}(B(0,1))}$一致有界（对于某个$1<p<n$），令$f_k^{\epsilon}:=\eta_{\epsilon}*f_k$为$f_k$的磨光函数, 求证: 当$\epsilon\to 0+$时，$\|f_k^{\epsilon}-f_k\|_{L^p}$（关于$k$）一致收敛到0.

3. （20分）设$f:\mathbb{U}\to\mathbb{R}$是开集$U$上定义的Lipschitz连续函数, 求证: $f\in W_{loc}^{1,\infty}(U)$.

三、定理证明（30分）

1. （15分）设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是局部Lipschitz连续的函数，令$Z:\{x\in\mathbb{R}^n: f(x)=0\}$. 求证: $Df(x)=0\ for\ \mathcal{L}^n-a.e.\ x\in Z$.

2. （15分）设$L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是线性映射，$n\le m$. 求证: 对任意$A\subseteq\mathbb{R}^n$, 成立

$$\mathcal{H}^n(L(A))=[L]\mathcal{L}^n(A).$$