

一 问答题

考虑如下两模型:

$$\text{模型 1: } Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + e$$

$$\text{模型 2: } Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + e$$

1. (8') 记 $\hat{\beta}_2$ 为模型 2 中 β_2 的 OLS 估计, ρ_{12} 为 X_1 与 X_2 的样本相关系数, 证明

$$\text{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{1}{(1 - \rho_{12}^2)} \frac{\sigma^2}{S X_2 X_2}$$

2. (8') 分别记在模型 1 和模型 2 下系数 β_1 的最小二乘(OLS)估计为 $\tilde{\beta}_1$ 和 $\hat{\beta}_1$ 。什么情况下, $\tilde{\beta}_1$ 和 $\hat{\beta}_1$ 相等? 说明理由。

3. (8') 对于模型 1, 在 σ^2 未知情形下, 试证明 $F = t^2$, 其中 F 为检验回归方程显著性的 F 统计量, t 为假设检验 $H: \beta_1 = 0$ 的 t 统计量。

4. (12') 假设模型 1 正确, 并且 $\mathbf{y} \sim N(\beta_0 \mathbf{1}_n + \beta_1 \mathbf{x}_1, \sigma^2 I_n)$ 。分别记在模型 1 和模型 2 下的拟合值向量为 $\hat{\mathbf{y}}_1$ 和 $\hat{\mathbf{y}}_2$, 残差平方和为 RSS_1 和 RSS_2 , 证明:

(a) $\Delta = \hat{\mathbf{y}}_1 - \hat{\mathbf{y}}_2$ 与 RSS_2 相互独立;

(b) RSS_2 与 $RSS_1 - RSS_2$ 相互独立。

二 计算题 (写出必要的计算过程)

下表是某年度 22 名学生的统计课三次考试成绩, 包括期末 Y , 两次预考 X_1 和 X_2 。

行号	Y	X_1	X_2	行号	Y	X_1	X_2
1	68	74	67	12	75	74	76
2	75	75	76	13	81	82	80
3	85	81	79	14	91	95	90
4	94	94	96	15	80	76	82
5	86	88	90	16	94	94	93
6	90	92	83	17	94	95	93
7	86	93	95	18	97	90	96

8	68	68	69	19	79	80	82
9	55	66	67	20	84	81	87
10	69	69	72	21	65	68	64
11	91	90	92	22	83	83	82

部分回归输出结果如下:

均值	\bar{y} :	81.364	\bar{x}_1 :	82.182	\bar{x}_2 :	82.318
----	-------------	--------	---------------	--------	---------------	--------

增广矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_c^T \mathbf{x}_c & \mathbf{x}_c^T \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T \mathbf{x}_c & SY Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2047.273 & 1951.818 & 2169.545 \\ 1951.818 & 2182.773 & 2220.455 \\ 2169.545 & 2220.455 & 2611.091 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{x}_c^T \mathbf{x}_c)^{-1} = \begin{bmatrix} 3.312 & -2.96 \\ -2.96 & 3.106 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

13.5 (18') 利用最小二乘估计法分别对模型 1 和模型 2 拟合这 22 组数据, 给出拟合回归方程, 并分别计算两者的残差均方 $\hat{\sigma}^2$ 和测定系数 R^2 。哪个模型拟合效果好? 说明理由。

2. (16') 对于模型 1, 假设随机误差项 $\mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ 。

(a) 检验其回归方程的显著性, 检验水平 $\alpha = 0.05$ 。(给出临界值并得出结论)

(b) 检验其回归方程是否经过原点, 检验水平 $\alpha = 0.05$ 。(同上要求)

3. (8') 对于模型 2, 假设 $\beta_1 + \beta_2 = 1$ 成立, 求此时的拟合回归方程。

17 4. (12') 新的一年度第一次预考成绩已出来, 全班平均成绩为 80, 请预测第二次预考的平均成绩。期末平均成绩预测又是多少? 分别利用模型 1 和模型 2 进行预测。两者是否一致?

作业: ~~对于~~ 对于 $\beta_1 + \beta_2 = 1$ 中
证明两模型下的预测值相等

14 5. (10') 利用最小二乘估计法用过原点的模型

$$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + e$$

拟合这 22 组数据, 给出拟合回归方程。另外,

(a) 其残差均方自由度为多少?

(b) 其与模型 2 相比, 你选择哪个模型? (置信水平 95%, 给出临界值)