2016年春季学期微分方程2(H)期末考试

整理人: 章俊彦 yx3x@mail.ustc.edu.cn, zhang.junyan@jhu.edu

2016年6月20日 8:30-11:00 主讲教师: 赵立丰

注：每题20分，总分100分。所有题目的解答要有详细过程，其中使用的定理或命题需要注明。

除特别说明以外，本试卷中的U均是指$\mathbb{R}^n$中的有界开集，并且边界光滑。

1. (1)设$2 \le p \le \infty$. 证明：存在常数$C > 0$, 使得如下不等式对任意$u \in C_c^\infty(U)$成立：

$$\|\nabla u\|_{L^p(U)} \le C \|u\|_{L^p(U)}^{1/2} \|\nabla^2 u\|_{L^p(U)}^{1/2}.$$

(2)一个迹定理的题，问的是一个函数的迹是否存在，具体忘记。

2. 令$Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j (a^{ij} \partial_i u) + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u + cu$, 其中$a^{ij}, b^i.c \in L^\infty(U_T)$, $f \in L^2(U_T)$, $g \in L^2(U)$. 并且a^{ij}满足一致椭圆条件和对称性$a^{ij} = a^{ji}$, $c \ge 0$. 今考虑如下抛物方程

$$\begin{cases} \partial_t u + Lu = f & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } [0,T] \times \partial U \\ u = g & \text{on } \{t = 0\} \times U. \end{cases}$$

请叙述该方程弱解定义，并用Galerkin逼近的方法证明能量估计和弱解的存在唯一性。

3. 一个半线性椭圆方程的题，比较难。

4. 对$(t,x) \in \mathbb{R}^{1+d}$ $(t \ne |x|)$, 定义共形变换

$$(t,x) \to (\bar{t}, \bar{x}) := \left(\frac{t}{|x|^2 - t^2}, \frac{x}{|x|^2 - t^2} \right),$$

和Kelvin变换

$$\mathcal{K}u = \bar{u} := u(\bar{t}, \bar{x}) ||\bar{x}|^2 - \bar{t}^2|^{(d-1)/2}$$

(1)证明：若$\Box u = 0$, 则$\Box \bar{u} = 0$;

(2)考虑如下变换

$$\mathbf{x}(t,x,\tau) := \gamma(x, t + \tau(|x|^2 - t^2)), \text{ 这里} \gamma := \frac{|x|^2 - t^2}{|x|^2 - (t + \tau(|x|^2 - t^2))^2},$$

及其对应的函数变换

$$w(t,x,\tau) := \gamma^{(d-1)/2} u(\mathbf{x}(t,x,\tau)).$$

证明它们对应的乘子是

$$m = (|x|^2 + t^2)\partial_t u + 2tx \cdot \nabla u + (d-1)tu.$$

(3) 在波方程$\Box u = 0$两边乘以这个乘子，能得到什么方程（守恒律）?

整理者注：第三问实际上是证明波方程的Morawetz恒等式

$$\partial_t c - \operatorname{div} \mathbf{r} = 0,$$

其中

$$c := \frac{1}{2}(|x|^2 + t^2)(u_t^2 + |\nabla u|^2) + 2tx \cdot \nabla u u_t + (d-1)tuu_t - \frac{d-1}{2}u^2$$

这称作共形能量密度, 以及

$$\mathbf{r} := ((|x|^2 + t^2)u_t + 2tx \cdot \nabla u + (d-1)tu)\nabla u + t(u_t^2 - |\nabla u|^2)x.$$

5. 令$Lu = -\sum_{i.j=1}^n \partial_j(a^{ij}\partial_i u)$, 其中$a^{ij} \in C^\infty(\bar{U})$满足一致椭圆条件且$a^{ij} = a^{ji}$. 设$\lambda_1$是$L$的主特征值。

(1)证明：

$$\lambda_1 = \min\{B[u,u] : u \in H_0^1(U), \|u\|_{L^2} = 1\},$$

其中$B[\cdot,\cdot]$是与L对应的双线性型；

(2)证明：如上最小值可以在某个在U内取值为正的函数w_1达到，并且w_1是L的主特征值λ_1对应的零边值问题的特征函数；

(3)证明：若$u \in H_0^1(U)$是L的主特征值λ_1对应的零边值问题的解，那么它必是w_1的常数倍。