中国科学技术大学数学科学学院

2016～2017 学年第一学期中考试试卷

■A 卷　　□B 卷

课程名称　微分方程 I　　　　课程编号 00135502

考试时间 2016.11.26　　　　考试形式　闭卷

姓　名＿＿＿＿＿＿　学　号＿＿＿＿＿＿　学　院＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一．（10 分）求解如下方程

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u\big|_{t=0} = x \end{cases}$$

二．（10 分）求解如下方程

$$\begin{cases} u_x + u_y + 2u = 2x + y \\ u\big|_{y=0} = x \end{cases}$$

三．（35 分）求如下方程通解

（1）$(x+\sqrt{t^2+x^2})dt - tdx = 0$

（2）$xdt + (t^2+t+x^2)dx = 0$

（3）$x'' - 2x' - 15x = 1 + (t-1)e^{5t}$.

四．（20 分）求解如下线性微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y - 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = 3x + 2y + z + e^t\cos t \\ x(0) = y(0) = z(0) = 1 \end{cases}$$

五．（10 分）设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$，证明：方程

$x' + 4x = f(t)$ 的任一解 $x = x(t)$ 均满足 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

六．（10 分）写出初值问题 $x'=2t\cos t+x^2, x(0)=0$ 的皮卡逼近序列

$\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t)$，并讨论解的存在区间.

七.（10 分）叙述微分方程组解的稳定性和渐近稳定性的定义，并用李雅普诺夫直接方法讨论线性微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x\end{cases}$ 零解的稳定性.

八．（15 分）（1）求边值问题 $\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dt^2}+\lambda y=0, 0\le t\le 1\\ y(0)=y(1)=0\end{cases}$ 的特征值及特征函数.

（2）求所有的 $a\in\mathbb{R}$，使得边值问题 $\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dt^2}+\pi^2 y=t+a, 0\le t\le 1\\ y(0)=y(1)=0\end{cases}$ 有解. 对于这样的 a，该边值问题的解是否唯一？

九．（20 分）设初值问题 $\dfrac{dx}{dt}=f(x), x(0)=x_0$ 的解 $x=\varphi(t;x_0)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在，其中 $f(x)$ 在实数轴上连续可微.

（1） 讨论 $\varphi(t;x_0)$ 关于 (t,x_0) 的连续性.

（2） 若给定 x_0 且对任意自然数 k 成立 $|\varphi(k;x_0)-x_0|<M$，其中 $M>0$ 为常数. 证明：$\varphi(t;x_0)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

十．（10 分）设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为有界光滑区域，$b_i(x)\in C(\overline{\Omega}), i=1,2$. 设 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ 为方程 $\Delta u+\sum_{i=1}^{2}b_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=0$ 的解. 求证：$\max_{\overline{\Omega}} u=\max_{\partial\Omega} u$.