装订线 答题时不要超过此线

中 国 科 学 技 术 大 学

2016—2017学年秋季学期期末考试A卷

考试科目: 数学分析(B3)　　　　得分__________

学生所在院系:__________　　　　学号______________　　　　姓名__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

注意: $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$与$\mathbf{R}^d$分别指全体有理数集合, 全体实数集合与d 维欧氏空间. 除问题一, 二之外, 其他问题的解答要有完整过程.

问题一 (15分) 判断如下命题的正误，答案直接写在试卷上，不要写出解答过程。

1A ______ 有理数Cauchy 列的全体构成可数集合。

1B ______ 设$\mathbf{R}$上的实值函数f在原点$x=0$处存在有限的极限A。那么对于任意$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得对任意实数x, 只要$|x| < \delta$, 就有$|f(x) - A| < \epsilon$。

1C ______ 设D是$\mathbf{R}$的无限子集。那么存在一个单调减函数$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，它的不连续点集合恰好是$D$。

1D ______ 设h是定义在开区间$(0, 1)$上的一致连续实值函数。那么存在闭区间$[0, 1]$ 上的连续实值函数H，对于任意$x \in (0, 1)$，都有$h(x) = H(x)$。

1E ______ 设$G(x)$是闭区间$[0, 1]$上的C^1实值函数。那么存在一列多项式$P_n(x)$ 具有如下性质: 任给$\epsilon > 0$, 存在正整数N, 任给$n > N$, 任给$x \in [0, 1]$, 都有

$$|G(x) - P_n(x)| < \epsilon, \quad |G'(x) - P_n'(x)| < \epsilon.$$

问题二 (20分) 分别写出欧氏平面$\mathbf{R}^2$的子集A和B的极限点集合, 内部, 闭包, 边界和一个可数稠密子集，不要解答过程，这里

$A = (0, 1) \times [0, 1] = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1, 0 \le y \le 1\}$,

$B = \mathbf{R}^2 \backslash \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \text{either} \quad x \notin \mathbf{Q} \quad \text{or} \quad y \notin \mathbf{Q}\}$。

问题三 (8分) 写出使得幂级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$绝对收敛的所有实数构成的集合，并说明理由。

问题四 (10分) 设f为$\mathbf{R}$上有界实值函数，它的周期为2π，并且f在闭区间$[0, 2\pi]$上黎曼可积且在$a \in [0, 2\pi]$处连续。证明$\lim_{N\to\infty} (\sigma_N f)(a) = f(a)$, 其中

$$(\sigma_N f)(x) := \frac{1}{2\pi(N+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) \left(\frac{\sin \frac{(N+1)y}{2}}{\sin \frac{y}{2}} \right)^2 dy.$$

问题五 (10分) 将n阶实方阵全体等同于欧氏空间$\mathbf{R}^{n\times n} = \mathbf{R}^{n^2}$。证明: 对每个与$n$ 阶单位矩阵I_n很靠近的n阶实方阵M，都存在平方根A(方程$A^2 = M$ 的解)；并且若A与I_n很靠近, 那么方程$A^2 = M$ 的解是唯一的。

问题六 **6A** (6分) 证明$n \geq 2$维欧氏空间$\mathbf{R}^n$的子集

$$M = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n : \quad x_1 x_2 \cdots x_n = 1\}$$

是$(n-1)$维C^∞曲面，具体写出M的函数图像表示，并求M在点$(\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n})$处的切空间。

6B (6分) 设f为$\mathbf{R}^n$上具有紧致支集的实值连续函数。证明: 对于任意$t > 0$成立

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(tx)\, dx = t^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx,$$

其中$tx = (tx_1, \cdots, tx_n)$。

问题七 (10分) **请在**7A**与**7B**中仅选一道进行解答。如果都作答，则根据**7A**判分。**

7A (10分) 设f是定义在闭区间$[0, 1]$上黎曼可积的有界实值函数。证明f 的函数图像

$$G(f) := \big\{\big(x,\, f(x)\big) \in \mathbf{R}^2 : x \in [0,\, 1]\big\}$$

在$\mathbf{R}^2$中的Jordan 测度等于零。

7B (10分) 判断欧氏平面$\mathbf{R}^2$的子集$B = \mathbf{R}^2 \backslash \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$是否连通并说明理由。

问题八* 设$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$为$C^1$映射。对于给定实数$t$, 定义映射

$$\Phi_t : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \quad \Phi_t(x) = x - t\, f(x).$$

8A (5分) 证明: 对于任意紧致子集$K \subset \mathbf{R}^n$，当$|t|$充分小时, $\Phi_t : K \to \mathbf{R}^n$为单射。

以下还假设f满足如下条件:

- $\langle f(x)\,, x\rangle = 0$, 其中$\langle\cdot\,,\cdot\rangle$为$\mathbf{R}^n$上的欧氏内积；
- $|f(x)| = |x|$ if $|x| = 1$, 其中$|x|$为$x \in \mathbf{R}^n$的欧氏范数，即$|x| = \sqrt{\langle x\,, x\rangle}$；
- $f(rx) = r\, f(x)$ for all $x \in \mathbf{R}^n$ and $r \geq 0$。

对于$r > 0$, 用$S(r) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| = r\}$表示$\mathbf{R}^n$中以原点为心，以$r$为半径的球面。

8B (5分) 证明: 对于任意$r > 0$，当$|t|$充分小时，Φ_t是从$S(r)$到$S\big(r\sqrt{1+t^2}\big)$ 的满射。

8C (5分) 证明: 对于任意$0 < a < b$，当$|t|$充分小时，

$$\Phi_t : A = \{x \in \mathbf{R}^n : a < |x| < b\} \to \sqrt{1+t^2}\, A = \Big\{x \in \mathbf{R}^n : a\sqrt{1+t^2} < |x| < b\sqrt{1+t^2}\Big\}$$

是同胚。

提示: 8B可以使用压缩映照原理证明。8C的证明可以使用8A与8B的结论。8A, 8B与8C单独判分。

A卷参考答案与评分标准

一 错，错，错，对，对. 每问三分.

二 A的极限点集与闭包：$[0,1]\times[0,1]$, 内部: $(0,1)\times(0,1)$, 边界: $\{0,1\}\times[0,1]\cup[0,1]\times\{0,1\}$, 可数稠密子集:$A\cap\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$.
B的极限点集合，闭包与边界: $\mathbf{R}^2$, 内部为空集, 可数稠密子集: $\mathbf{Q}\times\sqrt{2}\mathbf{Q}^\star$, 这里$\mathbf{Q}^\star=\mathbf{Q}\backslash\{0\}$.
每问两分.

三 $(0,2)$. 答案对, 给四分。说明理由四分, 有漏洞至少扣两分。

四 这是一道作业题。评分标准: 完美解答给满分十分; 论理有小的漏洞扣三分; 有大的漏洞扣六分; 一开始就有严重的逻辑错误而导致整个推理链条断裂得零分。

五 这是一道作业题。评分标准: 完美解答给满分十分; 论理有小的漏洞扣三分; 有大的漏洞扣六分; 一开始就有严重的逻辑错误而导致整个推理链条断裂得零分。

六 6A 这几乎是一道作业题。用隐函数定理证明M为C^∞曲面给两分，写出M可以表示成定义在$\mathbf{R}^{n-1}$的开集

$$\left\{(x_1,\cdots,x_{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1}:\,x_1x_2\cdots x_{n-1}\neq 0\right\}$$

上的C^∞函数$f(x_1,\cdots,x_{n-1})=\dfrac{1}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}$的图像给两分。由后者同时得出$M$为$C^\infty$曲面者直接给四分。写出切空间为满足方程

$$\langle x-(1,1,\cdots,1)\,,\,(1,1,\cdots,1)\rangle=x_1+\cdots+x_n-n=0$$

的超平面给两分。

6B 这是一道作业题。评分标准: 完美解答给满分六分; 仅有小的漏洞扣1分; 有大的漏洞扣3分; 一开始就有严重的逻辑错误而导致整个推理链条断裂得零分。

七 对于7A与7B两道题都解答的学生, 选7A进行判分.

7A 由f黎曼可积, 任给$\epsilon>0$, 存在$[0,1]$的分割π, 使得$\overline{S}_\pi(f)-\underline{S}_\pi(f)<\epsilon$(4 分). 利用$\overline{S}_\pi(f)$, $\underline{S}_\pi(f)$构造出有限个边平行于坐标轴的矩形, 它们覆盖$G(f)$, 两两不重叠，并且它们的面积之和恰好等于$\overline{S}_\pi(f)-\underline{S}_\pi(f)$(6分).

评分标准: 完美解答给满分; 仅有小的漏洞扣2分; 有大的漏洞扣5分; 一开始就有严重的逻辑错误而导致整个推理链条断裂得零分。

7B B道路连通, 从而连通. 判断正确得四分. 证明占六分.

证明如下: 任取B中两个不同的点(x_1, y_1)与(x_2, y_2). 只需说明B中存在连接它们的折线. 事实上, 可以不妨设$x_1 \notin \mathbf{Q}$. 如果$y_2 \notin \mathbf{Q}$, 那么从(x_1, y_1)到(x_1, y_2)的水平线段与从(x_1, y_2)到(x_2, y_2)的铅直线段都含于B. 如果$y_2 \in \mathbf{Q}$, 那么$x_2 \notin \mathbf{Q}$. 取$y_3 \notin \mathbf{Q}$, 那么从(x_1, y_1)到(x_1, y_3)的铅直线段, 从(x_1, y_3)到(x_2, y_3)的水平线段, 与从(x_2, y_3)到(x_2, y_2)的铅直线段都含于B.

证明评分标准: 完美解答给满分六分; 仅有小的漏洞扣1分; 有大的漏洞扣3分; 一开始就有严重的逻辑错误而导致整个推理链条断裂得零分。

八 评分标准: 每问五分，一共三问. 完美解答给满分五分; 仅有小的漏洞扣1分; 有大的漏洞扣3分; 一开始就有严重的逻辑错误而导致整个推理链条断裂得零分. 各问的参考解答如下.

8A 取$R > 0$充分使得$B_R = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \le R\}$包含$K$, 记$c = \sup_{x \in B_R} \|df(x)\|$. 当$|t|$充分小时, $|t|c < 1/2$. 那么任给$x, y \in K \subset B_R$, 由拟微分中值定理, 成立$|tf(x) - tf(y)| \le |x - y|/2$. 从而$|\Phi_t(x) - \Phi_t(y)| \ge |x - y| - |tf(x) - tf(y)| \ge |x - y|/2$, 即证$\Phi_t : K \to \mathbf{R}^n$为单射.

8B 由Φ_t的齐次性, 只需证明$r = 1$的情形. 另外, 由f满足的三个补充条件得知$|\Phi_t(x)| = \sqrt{1 + t^2}|x|$, 从而$\Phi_t$将$S(r)$映到$S(\sqrt{1 + t^2}r)$. 下面证明$\Phi_t : S(1) \to S(\sqrt{1 + t^2})$为满射. 取紧致子集$K = \{x \in \mathbf{R}^n : 1/2 \le |x| \le 3/2\}$. 那么类似8A, 当$|t|$ 充分小时, 成立$|tf(x) - tf(y)| \le |x - y|/2$ for all $x, y \in K$, 并且还成立$|tf(x)| \le 3|t|/2 \le 1/2$ for all $x \in K$. 任取$x_0 \in S(1)$, 容易看出辅助映射$x \mapsto x_0 + tf(x)$将K映到自身, 为压缩因子为1/2的压缩映射. 由压缩映射原理, 存在唯一的$x \in K$ 使得$x = x_0 + tf(x)$, i.e. $\Phi_t(x) = x_0$. 将x与x_0同时乘以$\sqrt{1 + t^2}$, 得证$\Phi_t : S(1) \to S(\sqrt{1 + t^2})$为满射.

8C 首先由8B知, 当$|t|$充分小时, $\Phi_t : A \to \sqrt{1 + t^2}A$为满射. 由8A知, 当$|t|$充分小时, 它为单射. 另一方面, 当$|t|$充分小时, $\sup_{x \in A} \|d\Phi_t(x) - I\| = \sup_{x \in A} |t|\|df(x)\|$亦然, 那么$d\Phi_t$在$A$ 上处处可逆. 由逆映射定理的推论知$\Phi_t : A \to \sqrt{1 + t^2}A$为开映射, 所以为同胚.

判卷相关事宜

• 请大家自带红笔于1月10日晚上7:00开始在我的办公室判卷, 在11日以内完成判卷工作。请胡家昊负责组织整个判卷工作, 我不参与。

• 请大家分配好任务, 参考每题后面的评分标准, 采用流水方式判卷,。全部判卷完毕之后, 请大家交叉复核一次。如果复核人对原判定分数有不同意见，请商讨决定最后分数。复核完毕之后总分, 总分完毕之后请大家切记再复核一次才登记到Excel 文件。请在1月11日晚上将Excel 文件发给我与三位课代表, 并在群里如下通知学生:

对分数有异议的同学请在1月12日晚上9:00之前向各自的助教提出查卷申请, 过期的申请恕不接受。助教将细致认真地重新批改申请人的试卷, 得到的分数为最终分数。整个过程中申请人不接触试卷。

• 整个查卷过程请在1月13日晚上之前完成, 并将记录有期末考试分数, 期中考试分数与平时成绩的Excel 文件汇总到一个Excel 文件上。然后对三个分数的占比进行调试，当优秀比例非常接近但不超过0.4时，计算出总评成绩(我确定的初始比例是期末0.5, 期中0.3, 平时0.2.)。最后请将记录有包括总评成绩在内的四个成绩的Excel 文件发给我。

装订线 答题时不要超过此线

中国科学技术大学

2016—2017学年秋季学期期末考试B卷

考试科目: 数学分析(B3)　　　　得分________

学生所在院系:________　　　　学号__________　　　　姓名________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

注意: $\mathbf{Q},\mathbf{R}$与$\mathbf{R}^d$分别指全体有理数集合, 全体实数集合与d 维欧氏空间. 除问题一, 二之外, 其他问题的解答要有完整过程.

问题一 (15分) 判断如下命题的正误，答案直接写在试卷上，不要写出解答过程。

1A ______ 一个有理数Cauchy 列一定有界。

1B ______ 设$\mathbf{R}$上的实值函数f在点x_0处连续。那么对于任意$\epsilon>0$, 存在$\delta>0$，使得对任意实数x，只要$|x-x_0|<\delta$，就有$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$。

1C ______ 设D是$\mathbf{R}$的可数无限子集。那么存在一个单调增函数$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, 它的不连续点集合恰好是$D$。

1D ______ 设h是定义在闭区间$[0,1]$上的黎曼可积函数。那么h的不连续点集合一定是有限集合。

1E ______ 闭区间$[0,1]$上一致有界的连续实值函数列一定有一致收敛子列。

问题二 (20分) 分别写出欧氏平面$\mathbf{R}^2$的子集A和B的极限点集合, 内部, 闭包, 边界和一个可数稠密子集，不要解答过程，这里

$A=(0,1)\times\mathbf{R}=\big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\,0<x<1\big\}$,

$B=\mathbf{Q}\times\big(\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\big)=\big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\,x\in\mathbf{Q},\,y\notin\mathbf{Q}\big\}$。

问题三 (8分) 写出使得幂级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$绝对收敛的所有实数构成的集合，并说明理由。

问题四 (10分) 设f为$\mathbf{R}$上连续实值函数，它的周期为2π，并且f在$a\in[0,2\pi]$处二阶连续可微。证明$\lim_{N\to\infty}\big(S_Nf\big)(a)=f(a)$, 其中

$$\big(S_Nf\big)(x):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)\,\frac{\sin\big(N+\frac{1}{2}\big)y}{\sin\frac{y}{2}}\,dy.$$

问题五 (10分) 将n阶实方阵全体等同于欧氏空间$\mathbf{R}^{n\times n} = \mathbf{R}^{n^2}$。证明：对每个与$n$ 阶单位矩阵I_n很靠近的n阶实方阵M，都存在2017次方根A(方程$A^{2017} = M$ 的解)；并且若A与I_n很靠近，那么方程$A^{2017} = M$ 的解是唯一的。

问题六 6A (6分) 证明$n \geq 2$维欧氏空间$\mathbf{R}^n$的子集

$$M = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n : \quad x_1 + x_2^2 + \cdots + x_n^n = n\}$$

是$(n-1)$维C^∞曲面，具体写出M的函数图像表示，并求M在点$(\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n})$处的切空间。

6B (6分) 设f为$\mathbf{R}^n$上具有紧致支集的实值连续函数。证明：对于任意$t > 0$成立

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x/t)\, dx = t^n \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx,$$

其中$x/t = (x_1/t, \cdots, x_n/t)$。

问题七 (10分) 设f是正方形$[0, 1] \times [0, 1] = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\big\}$上实值连续函数。从定义出发证明$f$在$[0, 1] \times [0, 1]$上黎曼可积。

问题八* 设F是$\mathbf{R}^2$的闭子集, 并且F的内部$\mathrm{Int}(F)$与F的余集$F^c := \mathbf{R}^2 \backslash F$都非空。

8A (5分) 证明：任取$x \in \mathrm{Int}(F)$, 任取$y \in F^c$, 证明从x到y的线段

$$\overline{xy} := \{tx + (1-t)y | t \in [0, 1]\}$$

上必定含有F的边界点。

8B (10分) 证明：F的边界集合∂F是不可数集合。

提示: 8A与8B独立评分，可以使用8A证明8B。

B卷参考答案与评分标准

一 对，对，对，错，错，. 每问三分.

二 A的极限点集与闭包：$[0,1]\times\mathbf{R}$, 内部: A, 边界: $\{0,1\}\times\mathbf{R}$, 可数稠密子集:$A\cap\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$.
B的极限点集合，闭包与边界: $\mathbf{R}^2$, 内部为空集, 可数稠密子集: $\mathbf{Q}\times\sqrt{2}\mathbf{Q}^\star$, 这里$\mathbf{Q}^\star=\mathbf{Q}\backslash\{0\}$.
每问两分.

三 $(-2,0)$. 答案对, 给四分。说明理由四分, 有漏洞至少扣两分。

四 证明类似于课程讲义的定理3.5.1，但是这道题不是该定理的直接推论。

评分标准: 完美解答给满分十分; 论理有小的漏洞扣三分; 有大的漏洞扣六分; 一开始就有严重的逻辑错误而导致整个推理链条断裂得零分。

五 这是一道作业题的变形。评分标准: 完美解答给满分十分; 论理有小的漏洞扣三分; 有大的漏洞扣六分; 一开始就有严重的逻辑错误而导致整个推理链条断裂得零分。

六 6A 这几乎是一道作业题。用隐函数定理证明M为C^∞曲面给两分，写出M可以表示成定义在$\mathbf{R}^{n-1}$上上的C^∞函数$f(x_2,\cdots,x_n)=n-(x_2^2+\cdots+x_n^2)$的图像给两分。由后者同时得出$M$为$C^\infty$曲面者直接给四分。写出切空间为满足方程

$$\langle x-(1,1,\cdots,1)\,,(1,2,\cdots,n)\rangle = x_1+\cdots+x_n-\frac{n(n+1)}{2}=0$$

的超平面给两分。

6B 这是一道作业题。评分标准: 完美解答给满分六分; 仅有小的漏洞扣1分; 有大的漏洞扣3分; 一开始就有严重的逻辑错误而导致整个推理链条断裂得零分。

七 这是课程讲义的定理6.2.4 的特例，但是要求学生从原始定义出发重新证明。

评分标准: 完美解答给满分; 仅有小的漏洞扣2分; 有大的漏洞扣5分; 一开始就有严重的逻辑错误而导致整个推理链条断裂得零分。对于引用定理6.2.4 证明的学生给3分。

八 评分标准: 第一问五分，第二问十分。第一(二)问完美解答给满分, 仅有小的漏洞扣1(2)分; 有大的漏洞扣3(5)分; 一开始就有严重的逻辑错误而导致整个推理链条断裂得零分. 各问的参考解答如下.

8A 记$t_0=\sup\{t:\ tx+(1-t)y\in\mathrm{Int}(F)\}$. 那么由于$x\in\mathrm{Int}(F)$, 则$t_0>0$; 由于$y\in F^c$(开集), 得$0<t_0<1$. 那么由$t_0$的定义知$t_0x+(1-t_0)y$必定属于$\partial F$.

8B 由于F^c为非空开集, 那么F^c包含以$y\in F^c$为心，以某个$r>0$为半径的闭球B. 从x出发恰有两条射线与B分别相切于z_1, z_2. 任给圆周∂B上z_1与z_2之间的劣弧$\widehat{z_1z_2}$上的一点z, 由8B, 线

段$\overline{xz}$与∂F相交，并且由几何直观得这一族线段$\{\overline{xz} : z \in \widehat{z_1 z_2}\}$除了在端点$x$之外两两不交，从而我们得到从集合$\widehat{z_1 z_2}$ 到∂F 的单射。由于劣弧与区间$[0, 1]$同胚，劣弧为不可数集合，从而∂F也不可数。