

中国科学技术大学2016-2017学年第一学期
数学分析 B1 第三次测试试卷

日期: 2016.12.12

得分: _____

所在院系: _____

姓名: _____

学号: _____

一. (10分) 用 $\epsilon - \delta$ 语言写出函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上黎曼可积的定义

二. (14分) 求不定积分

(1) $\int (1 + \sqrt{x})^{100} dx$; (2) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1+x^2}{x^2} dx$.

三. (24分) 求积分:

(1) $\int_0^{2\pi} x |\sin x| dx$, n 是正整数; (2) $\int_0^1 \frac{x}{e^x + e^{1-x}} dx$;

(3) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

四. (8分) 设 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调, 在 $x=0$ 的邻域无界, 且瑕积分 $\int_0^1 f(x) dx$ 收敛. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx.$$

五. (12分) 设 $F(x) = \int_0^x t \sin \frac{1}{t} dt$, $G(x) = \int_0^x \cos \frac{1}{t} dt$. 求 $F'(0)$, $G'(0)$.

六. (14分) 回答问题并简要说明理由:

- (1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 问 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是否一定有原函数?
- (2) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 问 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上是否一定可积?

七. (8分) 设 n 是正整数, 计算积分 $\int_0^\pi \cos^n x \cdot \cos nx dx$.

八. (10分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的一阶导数, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 且 $f'(x) - f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不变号. 证明:

$$\int_0^1 (f'(x) - f(x)) dx > \frac{1}{e}.$$