2016年春季学期调和分析期末考试

整理人: 章俊彦 zhangjy9610@gmail.com

考试时间：2016年6月4日下午2:30-5:00，主讲教师: 任广斌

前三题必做，第4、5两题二选一，第6、7两题二选一。每题20分，满分100分。

一、设$1 \le p < \infty$, $f \in L^p$. $\{\phi_\epsilon\}$是一族逼近恒等，证明：$\phi_\epsilon * f \xrightarrow{L^p} f$.

二、设$f \in L^1(\mathbb{R})$, 证明f和它的傅立叶变换$\hat{f}$不可能同时具有紧支集，除非$f = 0$ a.e.

三、证明Hausdorff-Young不等式：$f \in L^p$, $1 \le p \le 2$, p'为p的对偶指标，则$\|\hat{f}\|_{p'} \le \|f\|_p$.

四、考虑仿射群$(\mathbb{R}^2_+, \cdot) := \{(b,a) : b \in \mathbb{R},\ a > 0\}$赋予运算$(b_1,a_1)\cdot(b_2,a_2) = (b_1 + a_1 b_2, a_1 a_2)$. 定义酉表示$\pi : \mathbb{R}^2_+ \to U(\mathbf{H}^2_+(\mathbb{R}))$为$(\pi(b,a)f)(x) := \frac{1}{\sqrt{a}} f(\frac{x-b}{a})$. 其中$\mathbf{H}^2_+(\mathbb{R}) := \{f \in L^2 : Spt(\hat{f}) \subseteq [0,\infty)\}$为Hardy空间。证明：对任意$f, g \in \mathbf{H}^2_+(\mathbb{R})$且$\int_0^\infty \frac{|\hat{g}(\xi)|^2}{\xi} d\xi < \infty$成立如下恒等式，从而$\pi$是平方可积表示：

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} |\langle f, \pi(b,a) g\rangle|^2 \frac{dbda}{a^2} = \|f\|^2_{L^2[0,\infty)} \int_0^\infty \frac{|\hat{g}(\xi)|^2}{\xi} d\xi.$$

五、设$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$，证明：对任意给定的单位方向$\gamma \in S^2$, Radon变换$\mathcal{R}(f)(t,\gamma) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$并满足$\hat{\mathcal{R}}(f)(s,\gamma) = \hat{f}(s\gamma)$.

六、计算Hilbert变换对应的傅立叶乘子。

七、设有空间$X = (L^2(\mathbb{R}^{2n}), \times, -)$, $Y = (L^2(\mathbb{R}^{2n}), \circ, *)$和Hilber-Schmidt类$Z = (\mathbf{HS}(L^2(\mathbb{R}^n), \cdot, *)$, 以及酉算子$\mathbf{K} : X \to Y$和$\mathbf{S} : Y \to Z$. 对给定的$\sigma \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$, 令Weyl变换为二者的复合 $W_\sigma := (\mathbf{S} \circ \mathbf{K})\sigma$. 具体定义如下：$Y$空间中乘法定义为$(h \circ k)(x,y) := \int h(x,z) k(z,y) dz$, 共轭运算为$h^*(x,y) := \overline{h(y,x)}$；而$X$空间中的$-$是指复共轭，乘法$\times$由$\mathbf{K}$给出: $f \times g := \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{K} f \circ \mathbf{K} g)$. $\mathbf{K} := T^{-1} F_2^{-1}$, 这里$F_2$是对第二个变量（也就是2n维的后n维）作傅立叶变换，线性算子$(Tf)(x,y) := f(x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2})$称为缠绕算子。这样$\mathbf{K}$实际上是$X \to Y$的酉等距。对$k \in Y$, 令$\mathbf{S}_k := \mathbf{S} k$: $\mathbf{S}_k f(x) = \int k(x,y) f(y) dy$.

请证明：$\mathbf{K}\bar{f} = (\mathbf{K} f)^*$； $\mathbf{S}$保持$\circ$和$*$运算，即$\mathbf{S}^*_h = \mathbf{S}_{h^*}, \mathbf{S}_{h \circ k} f = (\mathbf{S}_h(\mathbf{S}_k f(x)))$. 并借此计算Weyl变换满足表达式：

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n),\ (W_\sigma f)(x) = \int\int e^{2\pi i \xi (x-y)} \sigma(\frac{x+y}{2}, \xi) f(y) d\xi dy.$$