

中国科学技术大学
2014—2015学年实变函数期中考试试卷

所在系：_____ 姓名：_____ 学号：_____

注意：请将所有的答案写在答题纸上。所有题目的解答要有详细过程，其中使用的定理或者命题需要注明。

1. (15分) 令 \mathcal{N} 是课本中所构造的区间 $[0, 1]$ 上的不可测集。如果 E 是 \mathcal{N} 的可测子集，证明： $m(E) = 0$ 。
2. (15分) 设 f 是 \mathbb{R} 上的可积函数并且一致连续，证明：

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

3. (15分) 令 $\{f_n\}$ 是一列可积函数，并且 $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, a.e., 证明： $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = 0$ 当且仅当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) = 0$, a.e.
4. (15分) 设 f_n 是 \mathbb{R} 上的可积函数列, f 是 \mathbb{R} 上的可积函数, 并且

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

证明： $f_n(x) \rightarrow f(x)$, a.e.

5. (15分) 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是有界的可测集，证明：

$$\lim_{h \rightarrow 0} m(E \cap (E + h)) = m(E).$$

6. (15分) 令 $m(E) < \infty$, $\{f_n\}$ 是 E 上的可测函数列, f 是 E 上的可测函数. 证明： f_n 在 E 上依测度收敛于 f 当且仅当 f_n 的任意子序列 f_{n_k} 都可以从中再找到一个子序列 $f_{n_{k_i}}$ 在 E 中几乎处处收敛于 f .
7. (10分) 定义 \mathbb{R} 上的函数 $f(x) = x^3$. 把 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 看成映射，证明：
 - (a) f 把零测集映成零测集.
 - (b) f 把可测集映成可测集.