# 中 国 科 学 技 术 大 学
# 2014—2015学年实变函数期末考试试卷

所在系：________________ 姓名：________________ 学号：________________

**注意**: 请将所有的答案写在答题纸上。在每张答题纸上写上姓名和学号。所有题目的解答要有详细过程。

**说明**: **题目** 1、2、3、4、5 **中选四道做，若全做，只计算分数最高的四道题。题目** 6、7、8 **为必做题。**

1. (15 分) 若 $0 < p < q < r \le \infty$, 试证明 $L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^r(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$。

2. (15 分) 若 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 且 $f$ 不恒等于 0, 试证明 $f^* \notin L^1(\mathbb{R}^d)$。

3. (15 分) 设 $\{K_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ 为一族单位近似。试证明存在正常数 $C$ 使得若 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$，则
$$\sup_{\epsilon>0} |(f * K_\epsilon)(x)| \le C f^*(x).$$

4. (15 分) 若 $F$ 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数，试证明
$$\int_a^b |F'(x)|\,\mathrm{d}x = T_F(a,b) \quad \text{当且仅当 } F \text{ 在 } [a,b] \text{ 上绝对连续。}$$

5. (15 分) 若 $\mu_0$ 为代数 $\mathcal{A}$ 上的准测度，对 $X$ 的任意子集 $E$ 我们定义
$$\mu_*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, \text{其中对任意 } j \text{ 有 } E_j \in \mathcal{A}\right\}.$$
试证明 $\mu_*$ 是 $X$ 上的一个外测度且满足
   (a) 对任意 $E \in \mathcal{A}$, $\mu_*(E) = \mu_0(E)$.
   (b) $\mathcal{A}$ 中的所有集合都是 Carathéodory 可测的。

6. (10 分) 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\alpha$ 为任意正数且 $E_\alpha = \{x : |f(x)| > \alpha\}$。试证明
$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty m(E_\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

7. (15 分) 已知若 $f$ 为以 $2\pi$ 与 1 为周期的实值连续函数则 $f$ 为常值函数。试用 Lebesgue 微分定理证明若 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ 是以 $2\pi$ 与 1 为周期的实值函数，则 $f(x) \equiv C$(常数), a.e. $x \in \mathbb{R}$。

8. (15 分) 设对任意的 $\epsilon > 0$, $f(x)$ 在 $[\epsilon, 1]$ 上绝对连续且有
$$\int_0^1 x|f'(x)|^p\,\mathrm{d}x < +\infty.$$
证明存在极限 $\lim_{x\to 0} f(x)$。

装订线 答题时不要超过此线