2015年秋季学期《高等实分析》期末考试试卷

本试卷共7大题，总分100分

2015.12.29 19:00-21:30

1. 设集合$E \subset \mathbb{R}^d$, 证明:E是Carathéodory可测的, 当且仅当E是Lebesgue可测的(即$\forall \epsilon > 0$,存在开集O包含E, $m_*(O-E) < \epsilon$).

2. 设$(X, \mathcal{M})$上有正测度μ和符号测度ν_1, ν_2, ν, 证明:
(1)若$\nu_1 \perp \nu_2$, 那么$|\nu_1| \perp |\nu_2|$;
(2)若$\nu \perp \mu$, $\nu << \mu$,那么$\nu = 0$.

3.设X是紧度量空间, l是$C(X)$上的一个正线性泛函, 令

$$\rho(O) = \sup\{l(f) | \mathrm{supp} f \subset O, 0 \le f \le 1, O \text{ is open}\},$$

$$\mu_*(E) = \inf\{\rho(O) | E \subset O, O \text{ is open}\}.$$

证明:μ_*是度量外测度.

4.设$u(t,x) \in C^{1,2}([0,+\infty) \times \mathbb{R}^d), f(x) \in C^2(\mathbb{R}^d)$满足微分方程$\partial_t u - \Delta u = 0$, $u(0,x) = f(x)$. 证明:

$$||u||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C t^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p})} ||f||_{L^r(\mathbb{R}^d)}, \quad 1 \le p \le r < +\infty$$

5. 设F是具有紧支集的分布, $\phi \in \mathcal{S}$是速降函数, 证明:$F * \phi \in \mathcal{S}$.

6. 设$I \subset \mathbb{R}$是开区间, $u \in \mathcal{D}'(I)$, 若$u' = 0$, 证明: u恒为常数.

7. 设$f \in L^p$, $1 \le p < +\infty$, $\lambda(\alpha) := m(\{x : |f(x)| > \alpha\})$, 令

$$\alpha_k = \inf_{\lambda(\alpha) < 2^k} \alpha, \; c_k = 2^{\frac{k}{p}} \alpha_k, \; \chi_k = \frac{1}{c_k} \chi_{[\alpha_{k+1}, \alpha_k)}(|f|) f.$$

再记

$$F(\alpha) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k H(\alpha_k - \alpha),$$

其中$H(x)$是Heaviside函数.

(1)证明:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^p = \int_0^{+\infty} \alpha^p (-F'(\alpha)) \mathrm{d}\alpha$$

(2)证明:

$$(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^p)^{\frac{1}{p}} \le C ||f||_{L^p}$$