2015 年高等概率论期末试题

(共 5 题, 每题 20 分, 满分 100 分, 答题时间: 100 分钟)

姓名:(   ), 学号:(   ), 本科生 ( ) 研究生 ( )

1. 设 $Z(\omega)$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下的一个随机变量, 且 $Z>0$, a.e. 以及 $\mathbb{E}[Z]=1$. 对任意 $A\in\mathcal{F}$, 定义如下集函数:

$$\mathbb{Q}(A)=\mathbb{E}[Z\mathbf{1}_A].$$

试回答以下问题:

(1) 证明 $\mathbb{Q}$ 是定义在 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一个概率测度.

(2) 证明 $\mathbb{Q}\sim\mathbb{P}$, 即证明 $\mathbb{P}<<\mathbb{Q}$ 以及 $\mathbb{Q}<<\mathbb{P}$.

(3) 设 $N(\omega)$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的一个服从参数为 $\lambda>0$ 的 Poisson 分布的随机变量, 设 $b>-1$, 计算数学期望: $\mathbb{E}\left[(1+b)^N\right]$.

(4) 试建立一个 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的概率测度 $\mathbb{Q}$ 满足如下的性质:

(a) $\mathbb{Q}\sim\mathbb{P}$;

(b) 在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{Q})$ 下, $N(\omega)$ 仍为一个服从 Poisson 分布的随机变量, 且

$$\int_\Omega N(\omega)d\mathbb{Q}(\omega)=(1+b)\lambda,$$

其中 $b>-1$.

2. 设 $X=\{X_t;\ t\geq 0\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 下一个具有连续样本轨道的连续时间非负随机过程且初始值 $X_0=x_0>0$. 设 $a\in(0,+\infty)$, 定义随机变量:

$$\tau_a(\omega)=\inf\{t\in[0,T];\ X_t(\omega)=a\},\qquad \omega\in\Omega,$$

其中记 $\inf\emptyset=+\infty$. 已知随机过程 $\{M_{t\wedge\tau_a};\ t\geq 0\}$ 是一个 $\{\mathcal{F}_t^X;\ t\geq 0\}$-鞅, 其中 $\mathcal{F}_t^X=\sigma(X_s;\ s\in[0,t])$, 这里 $t\wedge\tau_a=\min\{t,\tau_a\}$, 以及

$$M_t=f(t,X_t)-f(0,x_0)-\int_0^t\left(\frac{\partial f(s,X_s)}{\partial s}+\mu\frac{\partial f(s,X_s)}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f(s,X_s)}{\partial x^2}\right)ds,\quad t\in[0,T],$$

其中 $f(t,x)\in C^{1,2}([0,\infty)\times[0,\infty))$ 是任意的且满足 $\left.\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0}=0$. 如果 $x_0<a$, 计算数学期望 $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\tau_a}\right]$, 其中 $\lambda>0,\mu\in\mathbb{R},\sigma>0$ 是已知常数.

3. 设 $X\in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 以及一列单增 σ-代数 $\mathcal{G}_n\subset\mathcal{F}$, $n=1,2,\ldots$. 定义 $Y_n=\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_n]$, $n=1,2,\ldots$. 试回答以下问题:

(1) 证明对任意 $m,n=1,2,\ldots$, $\mathbb{E}[Y_{n+m}|\mathcal{G}_n]=Y_n$.

(2) 证明随机变量列 $\{Y_n;\ n=1,2,\ldots\}$ 是一致可积的. 如果 X 仅仅是可积的 (即 $X \in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$), 判别 $\{Y_n;\ n=1,2,\ldots\}$ 是否还是一致可积的? 如果是, 请给出证明.

(3) 定义条件方差 $\mathrm{CVar}_n(X)=\mathbb{E}[(X-Y_n)^2|\mathcal{G}_n]$, $n=1,2,\ldots$. 求证:

(a) 对每一个 $n=1,2,\ldots$, 随机变量 X 的方差:

$$\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}\left[\mathrm{CVar}_n(X)\right]+\mathrm{Var}(Y_n).$$

(b) $n\to\mathrm{Var}(X)-\mathrm{Var}(Y_n)$ 是一个单减数列.

4. 证明如下的结论:

(1) 设 X,Y 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上取实值的随机变量以及 $F_X(\cdot),F_Y(\cdot)$ 分别表示它们的分布函数, 用 $\mathcal{P}_X,\mathcal{P}_Y$ 分别表示它们的分布, 即对任意 $B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{P}_X(B)=\mathbb{P}(X\in B)$ 和 $\mathcal{P}_Y(B)=\mathbb{P}(Y\in B)$, 则

$$F_X(x)=F_Y(x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}\quad\Longrightarrow\quad\mathcal{P}_X=\mathcal{P}_Y,\ \text{ on } \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

(2) 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为一概率空间, 且 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3$ 是包含在事件域 $\mathcal{F}$ 中相互独立的 π-类, 则 $\sigma(\mathcal{A}_1)$, $\sigma(\mathcal{A}_2)$, $\sigma(\mathcal{A}_3)$ 为包含在事件域 $\mathcal{F}$ 中相互独立的 σ-代数.

5. 设 X, X_n,Y_n, $n=1,2,\ldots$ 为概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上取实值的一列随机变量, $c\in\mathbb{R}$ 表示一常数, $\mu_n(B)=\mathbb{P}(X_n\in B)$ 其中 $B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. 证明如下的结论:

(1) 如果 $\sup_{n\geq1}\mathbb{E}[|X_n|]<+\infty$, 则 $\{\mu_n;\ n\geq1\}$ 是一致胎紧的.

(2) 如果 $|X_n-Y_n|\xrightarrow{\mathbb{P}}0$ 且 $X_n\xrightarrow{d}X$, 则 $Y_n\xrightarrow{d}X$.

(3) 如果 $X_n\xrightarrow{d}X$ 及 $Y_n\xrightarrow{d}c$, 则 $(X_n,Y_n)\xrightarrow{d}(X,c)$.