

2015 年中国科学技术大学自主选拔学业能力测试

数学逻辑

本卷共四大题, 满分 100 分. 解答题写出必要的计算和证明过程.

一、填空题

1. 函数 $f(x) = \frac{1+x}{1+|x|}$ 的值域是_____;
2. 若 $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{2}$ 且 $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{1}{3}$, 则 $\cos(\alpha-\beta) =$ _____
3. 若函数 $y = f(x)$ 与 $y = e^x$ 的图像关于直线 $y = -x$ 对称, 则 $f(x) =$ _____
4. 在平面直角坐标系中, 设 O 是坐标原点, 定点 $P(1, 2)$, 动点 $Q(x, y)$ 满足 $x \leq 0$ 且 $1-x \leq y \leq x+3$, 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 的最大值是_____
5. 若椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的一条切线 l 与 x 轴相交于点 $(5, 0)$, 则 l 与两坐标轴所围成的三角形面积是_____
6. 设三个正整数 $a < b < c$, 满足 $a + b + c = 27$, 且 $abc = 200$, 则 $c =$ _____
7. $(1 - \frac{1}{x} + x)^9$ 的展开式子中 x^6 的系数为_____
8. 从 $\{1, 2, \dots, 20\}$ 中随机取 4 个不同的数, 并从小到大排列, 则他们构成等差数列的概率为_____

二、(16 分) 为测量远处一座山山峰相对于水平地面的高度 h , 测量者选取了水平底面上点 A, B, C , 分别测量了直线 PA, PB, PC 与水平面的夹角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, 其中 P 是山峰的顶点. 已知 B 是 AC 的中点, $AB = a$, 求 h (用 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 表示).

三、(18 分) 设 $n \in \mathbb{N}^*$, x_n 是满足以下两个条件的数列 a_1, a_2, \dots, a_n 的个数:

- ① 每个 a_i 都是 0 或者 1;
- ② 当 $n \geq 2$ 时, 任意相邻的两项乘积 $a_i a_{i+1} = 0$.

(1) 求 x_1, x_2, x_3 ;

(2) 求 $\sum_{n=1}^{2015} (x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2)$

四、(18 分)

(1) 求 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的单调区间和最大值;

(2) 设 $0 < x < y$, 并且 $x^y = y^x$. 求证: $x + y > 2e$, 其中 e 是自然对数的底.

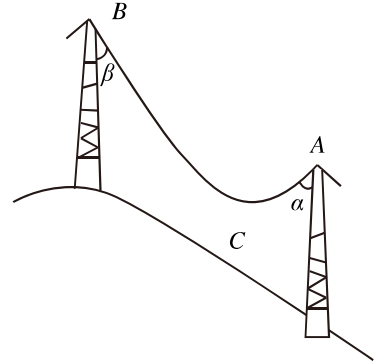
2015 年中国科学技术大学自主选拔学业能力测试

物理 探究

本试卷共七大题, 满分 100 分. 解答应写出必要的文字说明、方程式和主要演算步骤.

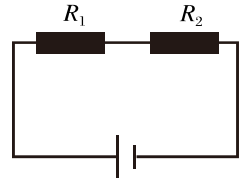
一、(10 分)

山坡上两相邻高压塔 A 、 B 之间架有匀质粗铜线, 平衡时铜线弧形下垂, 最低点在 C , 已知弧线 BC 的长度是 AC 的 3 倍, 而左塔 B 处铜线切线与竖直方向成 $\beta = 30^\circ$ 角. 问右塔 A 处铜线切线与竖直方向成角 $\alpha = ?$



二、(10 分)

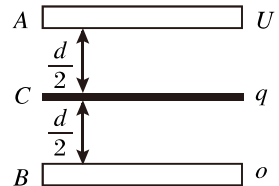
如图所示电路, 包含一个理想电源和两个电阻 R_1 和 R_2 , 用一个学生实验用电压表对该电路进行测量, 测得电阻 R_1 、 R_2 和电源上的电压分别为 2.0V 、 3.0V 和 6.0V , 试问电阻 R_1 和 R_2 两端的实际电压是多少?



三、(15 分)

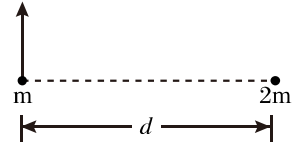
一平行板电容器两极板的面积都是 S , 相距为 d , 分别维持电势 $U_A = U$ 和 $U_B = 0$ 不变. 现将一块带有电荷量 q 的导体薄片(其厚度可略去不计)放在两极板的正中间, 薄片的面积也是 S , 如图所示, 略去边缘效应, 求

(1) 薄片的电势; (2) 导体薄片受到的库仑力.



四、(20分)

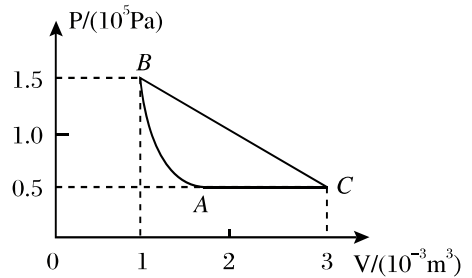
两个带电小球,所带电量相同,符号相反,质量分别是 m 和 $2m$,初始时刻,它们间距为 d ,小球 $2m$ 静止,小球 m 沿着与两者连线相垂直的方向以速度 v 运动.随后,它们多次处于相距 $3d$ 的位置上.求小球所带的电荷量.



五、(10分)

0.1mol 的理想气体,经历如图所示的 $BCAB$ 循环过程.问在此过程中气体所能达到的最高温度 $T = ?$

($R = 8.31\text{J} \cdot \text{Mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)



六、(15分)

容器中有两层液体.上层厚为 h_1 , 折射率为 n_1 , 下层液体足够厚, 折射率为 n_2 , 已知 $n_2 > n_1$, 一木棒与液面法线成小角度插入容器中, 其端点离液面深度为 $h_1 + h_2$.

- (1) 从上面看, 小木棒成什么形状?
- (2) 木棍端点的视像离上层液面多深?

七、(20分) μ 子是第二代轻子, 静止质量为 $m_0 = 106\text{MeV}/c^2$, 固有寿命为 $\tau_0 = 2.20 \times 10^{-6}\text{s}$.

- (1) 设在离地面 $h = 10^4 \text{m}$ 的高处产生一个带基本正电荷的 μ^+ 子, 则它具有多大的能量 E 才能在地面上被探测到?
- (2) 由于地磁场的影响, μ^+ 子的轨道会偏转. 设在地球赤道平面上方 $h = 10^4 \text{m}$ 处产生的 μ^+ 子竖直入射, 则到达地面时偏离原来方向多远? 假定地磁场能延伸到 10^4m 的高空, 大小为 $B = 1\text{Gs}$ (高斯), 沿地轴方向.

($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$, $1\text{MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{J}$)