概率论期中试题 2015年5月17日

姓名：　　　　　　学号：　　　　　　分数：

1. (15分) 分别详述n个事件和n个离散随机变量独立性的定义, 并对两个事件或随机变量的独立与不独立情形各举一例(一例对事件，另一例对随机变量).

2. (15分) 4个红球、8个蓝球和5个绿球随机排列在一条直线上，回答：
(a) 求前5个球是蓝色的概率；(b) 求前5个球中没有蓝球的概率；(c) 求最后三个球的颜色不相同的概率；(d)求所有红球摆放在一起的概率；(e) 求前5个球不全是蓝色的概率.

3. (10分) 对$0 < q < 1$，设(X, Y)有联合分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0;\\ qx, & 0\le x<1,\ 0\le y<1;\\ x, & 0\le x<1,\ y\ge 1;\\ q, & x\ge 1, 0\le y<1;\\ 1, & x\ge 1, y\ge 1,\end{cases}$$

分别求X与Y的分布函数. 试问X和Y是否独立? (X, Y)是联合连续型，联合离散型，还是既非连续也非离散?

4. (10分) 掷4颗均匀骰子，求总点数为10的概率.

5. (20分) 随机变量$X_1, \dots, X_n$相互独立, 且均服从相同的分布：$P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = -1) = 1 - p$. 记$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
(1) 求均值$\mathbb{E}(S_n)$与协方差$\mathrm{cov}(S_m, S_n)$, 这里$m \le n$;
(2) 当$m < n$时，求给定$S_m = a$下S_n的条件分布列$f_{S_n|S_m}$及条件期望$\mathbb{E}(S_n|S_m)$.

6. (15分) 甲乙两坛子中各装一只白球和一只黑球，从两坛中各取出一球交换后放入另一坛中，如此若干次. 以X_n表示第n次交换后甲坛中白球数.
(1) 证明对所有n有$\mathrm{var}(X_n) \le 1$.
(2) 若记

$$p_n = P(X_n = 2),\ q_n = P(X_n = 1),\ r_n = P(X_n = 0),$$

试导出$p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}$与$p_n, q_n, r_n$的关系式，求出$p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}$的表达式，并讨论当$n \to \infty$ 时的情形.

7. (15分) 在一次只有两个候选人的选举中, A得α张选票, B得β张选票, 且$\alpha \ge \beta$.
(1) 求计票过程中出现两人票数相等的概率;
(2) 试证计票过程中A从不落后于B的概率为$\frac{\alpha-\beta+1}{\alpha+1}$.