中国科学技术大学
2014–2015学年第2学期期末试卷

课程名称：概率论　日期：2015年6月25日　开课院系：数学科学学院

姓名：________________学号：________________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
分数									

1. (10分) 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$为独立同的参数为1的指数分布, 令

$$Y_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

求$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$的联合密度函数, 以及Y_n的密度函数.

2. (15分) 设$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$服从多元正态$N(\mathbf{0}, \Sigma)$, 这里正定矩阵$\Sigma = (\sigma_{jk})_{j,k=1}^n$. 证明

$$U = \sum_{k=1}^n a_k X_k \text{ 与 } V = \sum_{k=1}^n b_k X_k \text{ 独立 当且仅当 } \sum_{j,k=1}^n a_j b_k \sigma_{jk} = 0,$$

这里$a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$为实数. 并在$b_1, \ldots, b_n$不全为零时, 求条件期望$\mathbb{E}(U|V)$.

3. (15分) 分别详述分布函数弱收敛与随机变量依分布收敛的定义, 并证明随机变量的依概率收敛蕴含依分布收敛.

4. (10分) 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立且均服从区间$(0,1)$上均匀分布, 令$Z_n = \prod_{k=1}^n (X_k)^{\frac{1}{n} X_k}$. 试证$Z_n$依概率收敛到某常数$C$, 并求$C$.

5. (15分) 设$\phi(t)$为特征函数. 试回答(1)证明$\overline{\phi}$, ϕ^2, $|\phi|^2$与$e^{\lambda(\phi-1)}(\lambda > 0)$均为特征函数; (2)判断$\cos^2 t$ 是否是特征函数, 并说明理由.

6. (15分) 设连续型随机变量X有密度$f(x)$, 其熵定义为(约定$0 \cdot \log 0 = 0$) $H(X) = \mathbb{E}[-\log f(X)]$, 其对密度为$g$的随机变量$Y$的相对熵为(假定当$g(x) = 0$时也有$f(x) = 0$, 此时约定$0 \cdot \log \frac{0}{0} = 0$)

$$D(X\|Y) = \mathbb{E}\big[\log \frac{f(X)}{g(X)}\big].$$

回答(1)求参数为λ的指数分布和标准正态分布的熵; (2) $[0,1]$上均匀分布X_1与参数为λ的指数分布Y_1, 参数为λ的指数分布X_2与标准正态分布Y_2, 在这两种情况下求相对熵; (3) 给定X的均值μ和方差$\sigma^2 (\sigma > 0)$, 问X为何种随机变量时熵$H(X)$最大? 试说明理由.

7. (10分) 设$\{X_k\}$为相互独立的随机变量列, X_k服从$[-k, k]$上均匀分布, 记$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. 试选择适当的常数$a, b > 0$, 证明

$$\frac{1}{bn^a} S_n \xrightarrow{\text{D}} N(0,1).$$

8. (10分) 设$\{X_k\}_{k\geq 1}$独立同分布, $P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) = p (0 < p < 1)$, 令$Y_k = X_k X_{k+1}$, $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. 试证

$$\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} p^2.$$