整理：骆霄龙
授课教师：胡太忠

13 级《实用随机过程》期中考试试题

(2015-11-4)

1. 设 $x_1, \ldots, x_n$ 为正常数，请用概率的方法证明

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}.$$

2. 设 $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$, $X_3 \sim \text{Exp}(\lambda_3)$ 且三个随机变量相互独立，其中 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$. 求 $\mathsf{P}(X_3 > X_2, X_1 + X_2 > X_3)$.

3. 考虑一个 $M/G/\infty$ 随机服务系统，顾客到达系统的规律可以用齐次 Poisson 过程来描述，单位时间内平均到达的顾客数为 1，每个顾客需要服务员提供的服务时间是独立同分布的，其共同分布的概率密度函数为 $g(u) = 2(1+u)^{-3}$, $u \geq 0$, 系统有无穷多个服务员 (即顾客到达系统后立即能得到服务). 以 A_t 表示时刻 t 系统中处于工作状态的服务员个数.

(1) 已知时间段 $(1, 10]$ 到达了 2 位顾客，求时间段 $(15, 20]$ 到达 2 位顾客的概率；

(2) 求 A_5 的概率分布; → $A_5 \sim \text{Poi}(\frac{5}{6})$?

(3) 求 $\mathsf{Cov}(A_4, A_5)$.

4. 假设顾客到达银行的规律可用强度参数 $\lambda = 2$ 的齐次 Poisson 过程来描述，每位到达的顾客以概率 1/2 为男性. 已知在前 10 个单位时间里有 100 个顾客到达该银行，问在该时间段到达该银行的女性顾客平均有多少?

5. 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布的随机变量序列，共同分布为参数 λ 的指数分布，N 为几何分布随机变量，独立于 $\{X_n, n \geq 1\}$，其中

$$\mathsf{P}(N = n) = p(1-p)^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

求 $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ 的分布，并基于齐次 Poisson 过程的相关理论加以解释.

13 级《实用随机过程》期中考试试题解答

1. 证明：设 X 为一个随机变量，满足 $\mathsf{P}(X = \log x_i) = 1/n$, $i = 1, \ldots, n$. 对 $\phi(x) = e^x$ 应用 Jensen 不等式 $\mathsf{E}\phi(X) \ge \phi(\mathsf{E}X)$, 立得所欲证不等式. ∎

2. 解：

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X_3 > X_2, X_1 + X_2 > X_3) &= \mathsf{E}\Big[\mathsf{P}(X_3 > X_2, X_1 + X_2 > X_3 | X_1, X_2)\Big] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y} \int_y^{x+y} \lambda_3 e^{-\lambda_3 z} dz \\ &= \frac{\lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}.\end{aligned}$$

3. 解：顾客到达过程 $\{N(t)\}$ 为 HPP(1), 即强度参数 $\lambda = 1$.

(1) 利用 HPP 的独立增量性，得

$$\mathsf{P}(N(20) - N(15) = 2 | N(10) - N(1) = 2) = \mathsf{P}(N(20) - N(15) = 2) = 12.5e^{-5}.$$

(2) 记服务时间生存函数为 $\overline{G}(u) = (1+u)^{-2}$, 把到达的顾客分为以下 3 类:

I 型: 于 $(0, 4]$ 到达,且于时刻 5 未被服务完毕;

II型: 于 $(0, 4]$ 到达, 且于 $(4, 5]$ 内被服务完毕;

III 型: 于 $(4, 5]$ 到达,且于时刻 5 未被服务完毕.

具体分类如下: 于任意时刻 s 到达的顾客, 以概率 $p_i(s)$ 被划入第 i 型顾客, $i = 1, 2, 3$, 其中

$$p_1(s) = \begin{cases} \overline{G}(5-s), & s \le 4 \\ 0, & s > 4 \end{cases} \qquad p_2(s) = \begin{cases} \overline{G}(4-s) - \overline{G}(5-s), & s \le 4 \\ 0, & s > 4 \end{cases}$$

$$p_3(s) = \begin{cases} \overline{G}(5-s), & 4 < s \le 5 \\ 0, & s \le 4 \text{ 或 } s > 5 \end{cases}$$

以 N_i 记 $(0, 5]$ 时段第 i 型顾客的总数, 则 $A_5 = N_1 + N_3$, $A_4 = N_1 + N_2$. 由 Poisson 过程的抽样性质知: N_1, N_2, N_3 相互独立, 且皆服从 Poisson 分布, 对应的 Poisson 参数分别为

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda \int_0^5 p_1(s) ds = 1/3 \\ \lambda_2 &= \lambda \int_0^5 p_2(s) ds = 7/15 \\ \lambda_3 &= \lambda \int_0^5 p_3(s) ds = 1/2.\end{aligned}$$

Poi(λ)~X

E[X]=Var[X]=λ

于是 $A_5 \sim \text{Poisson}(5/6)$, $\text{Cov}(A_4, A_5) = \text{Var}(N_1) = 1/3$. ∎