2014 年复分析期中试题

整理： 张桐*

1、（20 分）判断下面命题是否正确，并详细说明理由或举出反例。

（1）$Log(z)$ 作为多值函数，有如下等式成立：

$$Log(z^2) = 2Log(z)$$

（2）设 $\Omega \in C$ 为给定的区域，则 Ω 上的全纯函数都存在原函数。

（3）单位圆盘 $D = \{|z| < 1\}$ 上的非零全纯函数在 D 中最多只能有有限个零点。

（4）设 $f(z)$ 为区域 Ω 上的全纯函数，且多任意 $z \in \Omega$ 有 $f^{'}(z) \neq 0$，则 $f(z)$ 在 Ω 上是单叶函数。

2、（30 分）计算题

（1）将函数 $Log(\frac{z-1}{z-2})$ 的无穷远邻域中的各单值分支展开成 $Laurent$ 级数。

（2）计算积分：

$$\int_{|z|=4} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz$$

（3）利用留数定理计算（不得直接套用教材上定积分计算的相关公式）

$$\int_0^{+\infty} \frac{xsinx}{x^2+2} dx$$

3、（20 分）

（1）求证：设 $f(z)$ 是 $D = \{|z| < 1\}$ 上的全纯函数且满足 $f(0) = 0$，$Re(f(z)) \leq 1 (\forall z \in D)$，则有

$$|f(z)| \leq \frac{2|z|}{1-|z|} \forall z \in D$$

（2）设 $f(z)$ 为整函数，且满足

$$\lim_{z \to \infty} z^{-1} Re(f(z)) = 0$$

求证 $f(z)$ 恒为常数。

4、（10 分）叙述辐角原理，并用辐角原理证明代数基本定理。

5、（10 分）求一个共形映射，使得将如下区域

$$\Omega = \{z \in C | 0 < |z| < 1, 0 < argz < \frac{\pi}{2}\}$$

映为单位圆 $D = \{|z| < 1\}$。

6、（10 分）设 $f(z)$ 在有界区域 Ω 上全纯，且 $0 \in \Omega$。若 $f(z)$ 满足

$$f(0) = 0, f^{'}(0) = 1, f(\Omega) \subset \Omega$$

则 $f(z) = z$.

*mail:zt001062@mail.ustc.edu.cn phone:18856017324