微分方程(II)期末试题（共 160 分）2014 年 6 月 18 日

1. (20 分)设 $\Omega=(0,2)\times(0,2)\subset R^2$

1）(6 分) 求 $\begin{cases}\Delta u+\lambda u=0, \ in\ \Omega\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$ 的第一、第二特征值及相应的特征函数.

2）(6 分) 对哪些 a，方程 $\begin{cases}\Delta u+2\pi^2 u=2x_1-a, \ in\ \Omega\\ u|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}$ 至少有一解？

3）(8 分) 若 $\int_\Omega \sin(\frac{\pi}{2}x)\sin(\frac{\pi}{2}y)v(x,y)dxdy=0$，对任意 $v\in H_0^1(\Omega)$.

证明： $\|v\|_{L^2}^2\le\frac{2}{\pi^2}\|Dv\|_{L^2}^2$

2. (10 分)设 u 满足 $\begin{cases}\Delta u=x^2+1, \ in\ B_1(0)\subset R^2\\ u|_{\partial B_1(0)}=0\end{cases}$，求 $u(0,0)$.

3. (15 分) 设 $\Omega=\{x\,|\,1<|x|<2\}\subset R^3$,求极小：$I=\inf\limits_{w-(2|x|-1)\in H_0^1(\Omega)}\int_\Omega(|Dw|^2+4w)dx.$

4.（25 分） 设 $(x_1,x_2)\in B_1(0)\subset R^2$，

1）(5 分) 若 $u\in C^\infty\left(\overline{B_1(0)}\right)$ 为方程 $\Delta u=1, \ in\ B_1(0)$ 的解，求证：$\max\limits_{B_1(0)}|Du|\le\max\limits_{\partial B_1(0)}|Du|$.

2) (10 分) 若 $u\in C^\infty\left(\overline{B_1(0)}\right)$ 为方程 $\Delta u=f(x), \ in\ B_1(0)$ 的解

求证：存在常数 C_1，使得 $\max\limits_{B_1(0)}|Du|\le C_1\left(\max\limits_{\partial B_1(0)}|Du|+\max\limits_{B_1(0)}|u|\right)$.

3）(10 分)) 若 $u>0$, 且 $u\in C^\infty\left(\overline{B_1(0)}\right)$ 为方程 $\left(1+x_2^2\right)u_{11}+(3+x_1^2)u_{22}=0, in B_1(0)$ 的解，

求证：存在常数 C_2，使得 $\sup\limits_{B_{\frac{1}{2}}(0)}u\le C_2\inf\limits_{\partial B_{\frac{1}{2}}(0)}u$

5.（10 分）求方程 $u_{xx}-y^2u_{yy}=0$ 过点 $(1,2)$ 的特征线

6.（10 分） $\begin{cases}u_t-\Delta u+u=0, \ in\ \Omega\times(0,+\infty),\Omega=B_1(0)\subset R^3\\ u|_{\partial\Omega}=0\\ u(x,0)=1-|x|^2\end{cases}$

求证：$|u(x,t)|\le e^{-t}, in\quad \Omega\times(0,+\infty)$

7. 1)（15分）$\begin{cases} u_t = \Delta u, \ in\ \Omega\times(0,+\infty), \Omega=[0,1]\times[0,1]\subset R^2 \\ u|_{\partial\Omega}=0 \\ u(x,0)=\sin x\cos y \end{cases}$ 求证 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|u(x,t)\|_{L^\infty(\Omega)}=0$

2)（10分）$\begin{cases} u_t = \Delta u, \ in\ \Omega\times(0,+\infty), \\ u|_{\partial\Omega}=0 \\ u(x,0)=u_0(x)\in C^2(\overline{\Omega}) \end{cases}$ 其中 $\Omega\subset[0,1]\times[0,1$ 为光滑区域，

证明 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|u(x,t)\|_{L^\infty(\Omega)}=0$（提示：令 $v=e^{-2t}\cos x_1\cos x_2$，利用比较定理）

8.（25分）设 $u\in C_1^2\left(\overline{\Omega}\times(0,+\infty)\right)$ 满足：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, \ in\ \Omega\times(0,+\infty), \Omega=B_1(0)\subset R^3 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0 \\ u(x,0)=1-|x|^2 \end{cases}$$

1)（5分）求证 $\overline{u(x,t)}:=\dfrac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x,t)dx\equiv\dfrac{2}{5}$

2)（10分）若 $u\in C^2(\overline{\Omega}), \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0$，$\Omega\subset R^n$ 为有界光滑区域

求证：$\int\limits_\Omega |Du|^2dx\le C_0^2\int\limits_\Omega|\Delta u|^2dx$，其中 C_0 为 Evans 书 5.8.1 节定理 1 中 Poincare 不等式中的常数。（提示：利用 Poincare 不等式以及公式 $\int_\Omega \Delta u dx=\int_{\partial\Omega}\dfrac{\partial u}{\partial n}dS$）。

3)（5分）令 $g(t)=\int\limits_\Omega|Du|^2dx$，求证：$\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=0$ 4)（5分）求证：$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_\Omega\left|u(x,t)-\dfrac{2}{5}\right|^2dx=0$

9（20分）考虑如下方程的光滑解：

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + f(x,t), \ in\ \Omega\times(0,T) \\ \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}+u\right)\right|_{\partial\Omega}=0 \\ u(x,0)=g(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=h(x) \end{cases}, E(t)=\frac{1}{2}\int\limits_\Omega\left(u_t^2+|Du|^2\right)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}u^2dS$$

f,g,h 光滑

$\Omega\subset R^n$ 为有界光滑区域。1)（10分）求证 $E(t)\le C_1(T)\left(E(0)+\int_0^T\int\limits_\Omega f^2dxdt\right)$

2)（10分）求证 $\sup\limits_{t\in[0,T]}\|u_{tt}\|_{L^2(\Omega)}\le C_2(T)\left[\|f\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}+\|g\|_{H^2}+\|h\|_{H^1}\right]$