中国科学技术大学

2014年秋季学期 线性代数(A2) 期中测试

一. 填空题(30分)

1. n阶复方阵可对角化的充要条件有:

① 最小多项式无重根;

② $m_i = n_i$;

③ 存在 $\mathcal{A}$ 的特征向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 构成V的一组基.

其它答案也可:

例如 $V = \bigoplus_{i=1}^{t} V_{\lambda_i}$

$\lambda_1, \dots, \lambda_t$ 是 $\mathcal{A}$ 不同全体特征值.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准型是:

3. 已知 $\lambda, \lambda^2, \lambda^2, \lambda-1, (\lambda-1)^2, (\lambda+1)^2$ 是四阶方阵A的初等因子:

则 ①: 不变因子组: ________;

②: 行列式因子组: ________;

③: Smith标准型: ________

4. 方阵 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} & & a \\ & 0 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$ 相似, 则 $a=$ ________.

5. 默写实方阵的实相似标准型. (书上 Thm 7.8.4).

$\mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), \dots, J_{n_t}(\lambda_t), K_{m_1}(a_1 \pm b_1 i), \dots, K_{m_p}(a_p \pm b_p i))$.

其中 $K_{m_j}(a_j \pm b_j i) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix} & I_2 & & \\ & \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix} & I_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & I_2 \\ & & & \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ 是初等因子为 $(\lambda - a_j \pm b_j i)^{m_j}$ 的 $2m_j$ 阶方阵

其中 $(\lambda-\lambda_j)^{n_j}$, $1 \le j \le t$ 是 A的全体初等因子.

$(\lambda - a_j \pm b_j i)^{m_j}$ $(1 \le j \le p)$

$\lambda_1, \dots, \lambda_t$ 是A全体特征值 (可相同).

$a_j \pm b_j i$ 是A全体虚特征值 (可相同).

1101 08 201412-2500

二. 解答题（70分）

12分

1. 若 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是 $A \in F^{n\times n}$ 的互不相同全体特征值. 证明 $\forall f \in F[\lambda]$, 使 $f(\lambda_i)$ 是 $f(A)$ 全体特征值

类似证明 书上定理6.7.3

由此 $f(A) \sim \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & * \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$ 对角元即为全体特征值

12分

2. 求可逆复方阵 P. 使 $P^{-1}AP$ 是 Jordan 型, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ 书上有吧

14分

3. 证明: n 阶复方阵 A 的特征值 λ_0 的几何重数是所有属于 λ_0 的 Jordan 块个数

15分

4. 线性变换 $\mathscr{A}: V \to V_F^n$ 在 V 的基 $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ 下的方阵为 A. 而 $\lambda I - A$ 的 Smith 标准型是 $S(\lambda) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, d_s(\lambda), \ldots, d_n(\lambda))$, d_i 是~~首一多项~~首项系数为1的多项式. 次数 $\deg(d_i) \geq 1$.

证明: V 可分解作 $n-s$ 个循环子空间直和, 即 $V = \bigoplus_{i=s+1}^{n} F[\mathscr{A}]\beta_i$, 其中 β_i 的最小多项式为 $d_i(\lambda)$. $\dim F[\mathscr{A}]\beta_i = \deg(d_i)$.

(引理 7.7.1)

15分

5. 设 $\mathscr{A}: V \to V_F^n$. 最小多项式 $d_A(\lambda) = p_1^{m_1} \cdots p_t^{m_t}$. p_i 是互不相同的 F 上不可约的多项式. 证明: $V = \bigoplus_{i=1}^{t} \mathrm{Ker}(p_i^{m_i}(\mathscr{A}))$.

要实: ① $\sum_{i=1}^{t} \mathrm{Ker}(p_i^{m_i}(\mathscr{A}))$ 是直和 (易证 0 的表示法唯一)

令 $f_i(\lambda) = \dfrac{d_A(\lambda)}{p_i^{m_i}(\lambda)}$

对 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_t = 0$ $(\alpha_i \in \mathrm{Ker}\, p_i^{m_i}(\mathscr{A}))$

用 f_i 作用. 有 $f_i(\mathscr{A})\alpha_i = 0$ 又因 f_i 与 $p_i^{m_i}$ 互素

由 Bezout 定理, 存在 u_i, v_i 使 $u_i f_i + v_i p_i^{m_i} = 1$

作用于 α_i 得 $\underbrace{d_A(\mathscr{A})(\alpha_i)}_{0} + \underbrace{v_i(\mathscr{A}) p_i^{m_i}(\mathscr{A})\alpha_i}_{0} = \alpha_i$

$\therefore \alpha_i = 0 \Rightarrow$ 是直和

② 再证该直和为 V. 即证 $\forall \alpha \in V$

α 可由直和线性表示. $f_1, \ldots, f_t$ 互素

则存在 $u_1 \ldots u_t$ s.t. $u_1 f_1 + \cdots + u_t f_t = 1$

作用于 α 上 $\alpha = \sum_{i=1}^{t} u_i f_i(\mathscr{A})\alpha$

令 $\alpha_i = u_i f_i(\mathscr{A})\alpha$, $p_i^{m_i}(\mathscr{A})\alpha_i = 0$ $\Big\} \Rightarrow$ QED

#

中国科学技术大学

三. 附加题（30分）

1.（15分）$\mathscr{A}: V\to V$ 极小多项式 $d(\lambda)$. 证明

(1) $\exists \alpha\in V$ s.t. $d_\alpha(\lambda)=d(\lambda)$

(2) ∃不变子空间 U, 有 $V=C(\alpha)\oplus U$

Proof. Assume $\lambda I-A \simeq S(\lambda)=\mathrm{diag}(1,1,\dots,1,d_s(\lambda)\dots d_n(\lambda))$ $d_s|d_{s+1}\cdots|d_n(\lambda)$ 首一

~~由于~~ 由二的4题 有 ① $V=\bigoplus_{i=s}^{n} C(\beta_i)$. $\alpha=\beta_n$ 得证

② 令 $U=C(\beta_s)\oplus\cdots\oplus C(\beta_{n-1})$ U为不变子空间

$C(\alpha)=C(\beta_n)$ $\Rightarrow$ $V=C(\alpha)\oplus U$

2. $A=\begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1}\end{pmatrix}$ $B=(b_{ij})_{n\times n}$.

(1) 若 $AB=BA$, 则 $B=?$（表成A的多项式） $b_{n1}A^{n-1}+\cdots+b_{21}A^1+b_{11}I$

(2). 求 $\dim\{X: AX=XA\}=n$.

Pf.

(2). 只证 $I, A,\dots,A^{n-1}$ 线性无关 显然.

(1) 设 $\mathscr{A}(\alpha_1)=\alpha_2$, $\mathscr{A}(\alpha_2)=\alpha_3,\dots,\mathscr{A}(\alpha_{n-1})=\alpha_n$.

$\Rightarrow \mathscr{A}(\alpha_n)=-(a_0+a_1\mathscr{A}+\cdots+a_{n-1}\mathscr{A}^{n-1})(\alpha_1)$. $\therefore V=F[\mathscr{A}]\alpha_1$

从而 $\mathscr{B}: F[\mathscr{A}]\alpha_1\to F[\mathscr{A}]\alpha_1$

$\mathscr{B}\in F[\mathscr{A}]$ $\therefore \exists g(\lambda)\in F[\lambda]$ s.t. $\mathscr{B}(\alpha_1)=g(\mathscr{A})\alpha_1$.

不妨 $\deg g\le n-1$（高于n次的, 用 $0\sim n-1$ 次线性表示）

$B=C_{n-1}A^{n-1}+\cdots+C_1A+C_0I$

B的首列 $\begin{pmatrix} b_{11}\\ \vdots \\ b_{n1}\end{pmatrix}$ I的首列 $\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$ A $\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$ A^2 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$ … A^{n-1} $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\1\end{pmatrix}$

1101C 08 201412-2500

$b_{11}=1$. $b_{12}=C_1$ …… $b_{n1}=C_{n-1}$

…… $B=g(A)=b_{n1}A^{n-1}+\cdots+b_{21}A+b_{11}I$

\#