2014春季线代A1期中　　2014.04.27　　教师：宋光天

一、填空（35分）

1. $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2001 & 1 \\ 2 & 1 & 0\ 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1\ 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$ ______

2. 由向量组S生成的子空间V(S)维数是 ______

3. $\mathbb{R}^3$中 $\alpha_1=(1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,1,0)^T$，$\alpha_3=(1,0,-1)^T$，$\beta=(-4,3,4)^T$，求β在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$下的坐标.

4. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性空间V中3个线性无关的向量，求 $\operatorname{rank}\{\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1\}=$ ______

5. $n>1$，求 $\det\begin{pmatrix} x & & & & a_0 \\ -1 & x & & & a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & -1 & x & a_{n-2} \\ & & & -1 & x+a_{n-1} \end{pmatrix} =$ ______

二、解答题（65分）

6.（20分）$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 13 & 12 \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$

(1) 求A的行向量的一个极大线性无关组并扩充为F^5的一组基

(2) 设实向量空间$\mathbb{R}^4$的子空间U_1由A的列向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$生成，$U_2$由A的列向量$\alpha_4,\alpha_5$生成．求$U_1\cap U_2$的一组基，和它的一个补空间$U_3$

7.（15分）设W_1,W_2是域F上的线性空间V的子空间，求证：

$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$

8.（20分）设$W_1,\dots,W_t$是域F的有限维线性空间V的子空间，求证以下命题等价：

(1) $W_1+\dots+W_t$是直和；(2) $(W_1+\dots+W_{i-1})\cap W_i=\{0\}$　$2\le i\le t$，

(3) $\dim(W_1+\dots+W_t)=\sum_{i=1}^{t}\dim W_i$；(4) 若$M_i$为$W_i$的基，则$\bigcup_{i=1}^{t}M_i$为$W_1+\dots+W_t$的基

9.（10分）设A为域F上$\operatorname{rank}=r$的$m\times n$矩阵，若非齐次方程组$Ax=b$有解，求解集的秩．

三、附加（40分）

10. 设$W_1,\dots,W_t$为域F上线性空间V的子空间，$t\ge 2$，$W=W_1\cup\dots\cup W_t$

证明：W是V的子空间 $\Longleftrightarrow$ $\exists\, l\in\{1,2,\dots,t\}$，s.t. $W\subseteq W_l$.

11. 设F是数域，若集合V上有加法与一个F上的数乘，且满足"F上的线性空间"8条定义中除去"加法交换律"都成立，求证加法交换律也对．