整理：骆霄龙
授课教师：冯群强

《实用随机过程》期中考试试题

姓名　　　　学号　　　　得分

(2011年11月2日)

1. (20分) 设$\{N(t), t \geq 0\}$是速率为λ的Poisson过程. 以S_n记第n个事件发生的时刻, $s, t > 0$.

(1) 求$\mathrm{E}[S_4|N(1)=2]$.

(2) 求$\mathrm{E}[N(4)-N(2)|N(1)=3]$.

(3) 在条件$N(s+t)=n$下, 求$N(s)$的分布律.

(4) 求$\mathrm{Cov}(N(s), N(s+t))$.

2. (15分) 设随机变量X和Y独立同分布于参数为λ的指数分布.

(1) 问$\max(X,Y)-\min(X,Y)$服从什么分布?

(2) 问$\max(X,Y)-\min(X,Y)$和$\min(X,Y)$是否独立? 请证明你的结论.

(3) 试用Poisson过程的背景解释上面的结果.

(注: 允许直接利用Poisson过程去求解(1)和(2)).

3. (16分) 以S_n记速率为λ的Poisson过程$\{N(t), t \geq 0\}$的第n个事件发生的时刻. 对任意一元函数g, 对任意$t > 0$, 试求

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} g(S_i)$$

的期望和方差.

4. (15分) 设更新过程$\{N(t), t \geq 0\}$的更新区间长度为一列独立同分布于$U(0,1)$的随机变量.

(1) 对任意$0 < t \leq 1$, 证明更新函数$m(t)$满足函数方程

$$m(t) = t + \int_0^t m(y)dy.$$

(2) 利用(1)中的结论证明对任意$0 < t \leq 1$, $m(t) = e^t - 1$.

5. (16分) 考虑连续地投掷一枚均匀硬币, 以H和T分别记正面和反面. 对花样TTHTT和HTHTHT, 利用更新过程的知识分别求它们各自

(1)相继出现的平均间隔时间;

(2)首次出现的平均时间.

6. (18分) 从数$1, 2, \cdots, N(N \geq 2)$中随机取一个数作为$X_1$, 然后依次对每个$n \geq 2$, 从数$1, 2, \cdots, X_{n-1}$中随机取一个数作为$X_n$. 则$\{X_n, n \geq 1\}$为一个Markov链.

(1) 试写出该Markov链的转移概率矩阵P.

(2) 对该Markov链进行状态分类(讨论分几个等价类, 周期性, 是否常返, 是否正常返).

(3) 极限$\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)}$是否存在? 为什么?

7. (附加题, 10分) 某个保险公司对参保人的收费率在r_1和r_0之中交替($r_0 < r_1$). 一个新的参保人开始时收费率为每个单位时间r_1. 当一个收费率为r_1的参保人在最近的s个单位时间内没有理赔, 那么他的收费率变成单位时间r_0. 收费率保持在r_0直到作了一次理赔, 这时收费率回转到r_1. 假定给定的一个参保人永远活着, 而且按速率为λ的Poisson过程要求理赔. 在很长一段时间内, 求该参保人

(1) 以收费率r_i付费的时间的比例P_i, $i = 0, 1$.

(2) 在单位时间所付的平均金额.