高等实分析第二次作业参考解答

章俊彦　zhangjy9610@gmail.com

2016.11.27

描述: 设$L: C_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是$C_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$上的连续线性泛函. 对任何 $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, 假设有

$$\sup\{L(f) : f \in C_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}), |f| \le 1, Spt(f) \subset K\} < +\infty.$$

在证明Riesz表示定理的过程中，我们先证明了对正线性泛函，结论成立，之后将L分解成正、负部之差:

$$L^+(f) := \sup\{L(g) : g \in C_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}), 0 \le g \le f\}, L^- := L^+ - L.$$

根据正线性泛函的Riesz表示定理, 存在Radon测度 μ^+, μ^-分别对应于 L^+, L^-. 即

$$L^\pm(f) = \int f d\mu^\pm.$$

问题: 证明: $\mu^+ \perp \mu^-$.

注: 这个结论是用来**绕开定义全变差测度，从而直接证明Riesz表示定理的**.

若有$\mu^+ \perp \mu^-$, 那么存在Borel集B, 使得$\mu^+(B) = \mu^-(B^c) = 0$.

令$\sigma = -\chi_B + \chi_{B^c}, \mu = \mu^+ + \mu^-$, 我们证明这样的$\sigma$和$\mu$就是Riesz表示定理结论里面需要的.

事实上

$$\int f\sigma d\mu = -\int_B f d\mu + \int_{B^c} f d\mu = -\int_B f d\mu^- + \int_{B^c} f d\mu^+ = -\int f d\mu^- + \int f d\mu^+ = L(f),$$

而$|\sigma(x)| = 1$, μ-a.e. $x \in \mathbb{R}^n$是显见的.

其中第2, 3个等号用到了$\mu^+|_{B^c} = 0, \mu^-|_B = 0$. 从而Riesz表示定理得证.

以上叙述来自殷老师.

□

下面给出3种**不利用Riesz表示定理结论**来证明$\mu^+ \perp \mu^-$的方法.

证法一: 测度的Lebesgue分解(该做法来自PB14000619, PB14000002, PB14210069)

将μ^-关于μ^+作Lebesgue分解. $\mu^- = \nu_{ac} + \nu_s$, 其中$\nu_{ac} << \mu^+, \nu_s \perp \mu^+$.

Claim: 对任意$f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, 成立

$$\int f D_{\mu^+}\nu_{ac} d\mu^+ = \int f d\nu_{ac}.$$

Claim的证明是容易的，首先对任何μ^+-可测集A,令$f = \chi_A$, 结论是成立的(Lebesgue分解直接给出). 从而对任何简单函数ϕ, Claim也成立. 对一般的$f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, 分解成$f = f^+ - f^-$, 对$f^\pm$, 分别找一串简单函数单调地逼近即可.

接下来我们**希望证明:** $\nu_{ac}(\mathbb{R}^n) = 0$. 若能证此, 那么就有$\mu^- = \nu_s \perp \mu^+$.

对任何$f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, 我们有:

$$\begin{aligned}L^+f &= \sup\{Lg|0\le g\le f, g\in C_c(\mathbb{R}^n)\} = \sup\{\int gd\mu^+ - \int gd\mu^-|0\le g\le f, g\in C_c(\mathbb{R}^n)\}\\ &= \sup\{\int gd\mu^+ - \int gd\nu_{ac} - \int gd\nu_s|0\le g\le f, g\in C_c(\mathbb{R}^n)\}\\ &= \sup\{\int g(1-D_{\mu^+}\nu_{ac})d\mu^+ - \int gd\nu_s|0\le g\le f, g\in C_c(\mathbb{R}^n)\}\\ &\le \sup\{\int g(1-D_{\mu^+}\nu_{ac})d\mu^+|0\le g\le f, g\in C_c(\mathbb{R}^n)\}\end{aligned}$$

令$A=\{x|0\le D_{\mu^+}\nu_{ac}(x)\le 1\}$, 则$A^c=\{x|D_{\mu^+}\nu_{ac}>1\}$(因$\mu^+,\nu_{ac}$均是Radon测度, 故Radon导数非负). 进而我们得到

$$L^+f\le \sup\{\int_A g(1-D_{\mu^+}\nu_{ac})d\mu^+|0\le g\le f, g\in C_c(\mathbb{R}^n)\}\le \int_A f(1-D_{\mu^+}\nu_{ac})d\mu^+.$$

另一方面，我们有

$$L^+f=\int fd\mu^+,$$

两式联立, 得到对任意$f\in C_c(\mathbb{R}^n)$, 成立

$$\int_{A^c} fd\mu^+ + \int_A fD_{\mu^+}\nu_{ac}d\mu^+\le 0.$$

让f跑遍$C_c^+(\mathbb{R}^n)$(注意这里限制了f非负)，此时左边两个积分式都是非负的, 但加起来非正, 那么只可能都取0, 这样就有$\mu^+(A^c)=0$. 据此，进一步, 对任何非负、具有紧支集的连续函数f, 成立下式

$$0=\int_A fD_{\mu^+}\nu_{ac}d\mu^+=\int fD_{\mu^+}\nu_{ac}d\mu^+,$$

令$f=\chi_{\bar{B}(0,k)}$, 可得对任何正整数k, $\nu_{ac}(\bar{B}(0,k))=0$, 进而$\nu_{ac}(\mathbb{R}^n)=0$. 结论证毕.

□

评分标准：测度分解，发现需要证明$\nu_{ac}=0$, 3分. L^+f的估计, 5分. $\mu^+(A^c)=0$, 1分. $\nu_{ac}(\mathbb{R}^n)=0$, 1分. 一共10分.

证法二: 符号测度的Hahn分解(该做法来自PB14000729, PB14001071, 我)

定义(符号测度)设(X,M)是可测空间, 称$\nu:M\to[-\infty,\infty]$作(X,M)上的符号测度, 若成立:

(1)$\nu(\Phi)=0$;

(2)ν至多只取到$+\infty,-\infty$中的一个, 不妨设作后者;

(3)可列可加性, 不再赘述.

注意，这里的测度是真正的测度，不是我们书上说的测度(书上的测度事实上是外测度). 我们可以证得, ν对M中的升、降列封闭.

定义(1)称$P\in M$是ν的正定集(positive set), 若对于任何$E\in M, E\subseteq P, \nu(E)\ge 0$.

(2)称$N\in M$是ν的负定集(negative set), 若对于任何$E\in M, E\subseteq N, \nu(E)\le 0$.

不难证明，正(负)定集的可测子集还是正(负)定集.

Hahn分解定理 对任何符号测度ν, 存在正定集P, 负定集N, 满足$P\cap N=\Phi, P\cup N=X$. 且若P',N'是另一个这样的分解, 则必有$\nu(P\Delta P')=\nu(N\Delta N')=0$.

该定理的证明很多书上都有, 是标准的证法. 例如可以参见这本书第三章定理3.3:

Gerald B. Folland: Real Analysis: Modern Techniques and Its Applications, 2nd edition, 1999.

现在令$X=\mathbb{R}^n$, $M=\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, $\nu=\mu^+-\mu^-$. 那么由Hahn分解定理, 存在Borel集P,N, 分别为ν的正、负定集.

Claim: $\mu^-(P)=\mu^+(P^c)=0$. 若能证此, 那么就有$\mu^+\perp\mu^-$.

Proof of the Claim:

只用证明对任何Borel集A, $\mu^+(P\cap A)=\nu(P\cap A)$, 然后令$A=P$即可, 这样可以得到$\mu^-(P)=0$. 同理(**这个同理由Hahn分解定理保证**), 可以证明$\mu^+(P^c)=0$.

$\mu^+(P\cap A)\geq\nu(P\cap A)$是显然的. 为证不等式另一方向. 我们任意固定一个$\epsilon>0$. 那么对$P\cap A$而言, 存在紧子集K, 开集O, 满足$K\subset\subset P\cap A\subset O, |\nu|(O-K)\leq\epsilon$.

设具有紧支集的连续函数$f\prec O$, 对任意满足$0\leq g\leq f$的紧支集连续函数g, 我们有:

$$Lg=\int gd\nu=\int_K gd\nu+\int_{O-K}gd\nu.$$

因为$K\subset P$, 所以K也是ν的正定集, 于是

$$\int_K gd\nu\leq\int_K 1d\nu\leq\nu(K)\leq\nu(P\cap A).$$

另一方面，

$$\int_{O-K}gd\nu\leq\int_{O-K}1d|\nu|\leq\epsilon.$$

所以对任何满足$0\leq g\leq f$的紧支集连续函数g, 我们有$Lg\leq\epsilon+\nu(P\cap A)$.

对所有这样的g取上确界, 得到任何满足$f\prec O$的紧支集连续函数f, $L^+f\leq\epsilon+\nu(P\cap A)$. 再对全体这样的$f$取上确界, 就有$\mu^+(O)\leq\epsilon+\nu(P\cap A)$, 又因为$\mu^+(P\cap A)\leq\mu^+(O)$, 令$\epsilon\to 0^+$, 就有$\mu^+(P\cap A)\leq\nu(P\cap A)$. 从而Claim获证. 结论证毕.

□

评分标准：Hahn分解定理的证明, 2分, 否则后面不能"同理". 写出Claim, 3分. 证明$\mu^+(P\cap A)\leq\nu(P\cap A)$, 4分. 其它叙述, 1分. 一共10分.

证法三：该做法来自PB14000327

由L^+,μ^+的定义知道, 对任何有界开集U, $\mu^+(U)=\sup\{Lg:g\prec U,g\in C_c(\mathbb{R}^n)\}$. 从而存在一列紧支集连续函数$\{g_k\},0\leq g_k\leq 1,Spt(g_k)\subseteq U$, 满足$\mu^+(U)-L(g_k)\leq\frac{1}{2^k}$.

取$U_k^0=U\cap\{x|g_k(x)=0\},U_k^n=\{x|g_k(x)>\frac{1}{n}\}$. $\{g_k\}$的连续性保证了U_k^n都是开集.

Claim: 对任何满足$-1\leq\tilde{g}\leq 0,\ \ Spt(\tilde{g})\subseteq U_k^n$的紧支集连续函数$\tilde{g}$, 必有$L\tilde{g}\leq\frac{n}{2^k}$.

若Claim成立, 则$\mu^-(U_k^n)=\sup\{Lg:-1\leq g\leq 0,Spt(g)\subseteq U_k^n\}\leq\frac{n}{2^k}$.

令

$$U^+=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}U_k^n$$

. 那么就有, 对任何正整数n,

$$\mu^-(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}U_k^n)\leq\lim_{N\to\infty}\sum_{k=N}^{\infty}\frac{n}{2^k}=0.$$

进而$\mu^-(U^+)=0$.

令

$$U^-=U-U^+=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{k=N}^{\infty}U\cap\{x|0\leq g_k(x)\leq\frac{1}{n}\}.$$

假如我们能够证明$\mu^+(U^-)=0$, 就有如下结论:

对任何有界开集U, 存在开子集U^+, 使得$\mu^+(U-U^+)=\mu^-(U^+)=0$.

现在令$U_n=B(0,n)$(开球), 那么则存在开子集U_n^+, 使得$\mu^+(U_n-U_n^+)=\mu^-(U_n^+)=0$. 再令

$$U^+=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n^+,$$

就有

$$\mu^-(U^+)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu^-(U_n^+)=0.$$

$$\mu^+(\mathbb{R}^n-U^+)=\mu^+(\bigcup_{n=1}^{\infty}B(0,n)-\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n^+)\le\mu^+(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B(0,n)-U_n^+))=\mu^+(\bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n-U_n^+))=0.$$

进而$\mu^+\perp\mu^-$.

至此，我们还欠证两个结论.

1. **Claim:** 对任何满足$-1\le\tilde g\le 0$, $Spt(\tilde g)\subseteq U_k^n$的紧支集连续函数$\tilde g$, 必有$L\tilde g\le\frac{n}{2^k}$.

Proof of the Claim:事实上, 对任何一个这样的$\tilde g$, 我们令$g'=g_k+\frac{1}{n}\tilde g$. 则$Spt(g')\subseteq U_k^n$且是紧集, 并且在$U_k^n$中, $0\le g'\le 1$ 恒成立.

于是, 由$\mu^+(U)$的定义知道, $L(g')=L(g_k)+\frac{1}{n}L(\tilde g)\le\mu^+(U)$, 即$L\tilde g\le n(\mu^+(U)-Lg_k)\le\frac{n}{2^k}$. Claim 得证.

2. 证明:

$$\mu^+(U^-)=\mu^+(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{k=N}^{\infty}U\cap\{x|0\le g_k(x)\le\frac{1}{n}\})=0.$$

反证, 假设$\mu^+(U^-)=a>0$. 那么对任何正整数n,

$$\mu^+(\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{k=N}^{\infty}U\cap\{x|0\le g_k(x)\le\frac{1}{n}\})\ge a.$$

从而对任何n, 存在正整数N_n,

$$\mu^+(\bigcap_{k=N_n}^{\infty}U\cap\{x|0\le g_k(x)\le\frac{1}{n}\})\ge\frac{a}{2}.$$

令$V_k^n=\{x|0\le g_k(x)\le\frac{1}{n}\}$.

取定$n\ge 4$. 任取正整数$k_0>\max\{N_n,\frac{\log 8/a}{\log 2}\}$. 取$\tilde U=\{0\le g_{k_0}<\frac{2}{n}\}\cap U$. 则$\cap_{k=N_n}^{\infty}V_k^n\subseteq\tilde U$, $\tilde U$为开集. 从而$\mu^+(\tilde U)\le\frac{a}{2}$.

从而存在紧支集连续函数$\tilde g, 0\le\tilde g\le 1, Spt\tilde g\subseteq\tilde U$, 使得$L\tilde g>a/4$.

令$g'=g_{k_0}+\frac{1}{2}\tilde g$. 则稍加计算就有$0\le g'\le 1$, $Spt(g')\subseteq U$.

但$Lg'=Lg_{k_0}+\frac{1}{2}L(\tilde g)\ge\mu^+(U)-\frac{1}{2^{k_0}}+\frac{a}{8}>\mu^+(U)+0$.

这和$\mu^+(U)=\sup\{Lg:g\prec U,g\in C_c(\mathbb{R}^n)\}$矛盾.

□

其它评分标准(用Riesz表示定理结论证明的)：找出集合$A=\{x:\sigma(x)=1\}(or-1)$, 4分. $\mu^+(A^c)=\mu^-(A)=0$, 2分. 取等测包(A不一定Borel)或修正一个零测集, 1分.