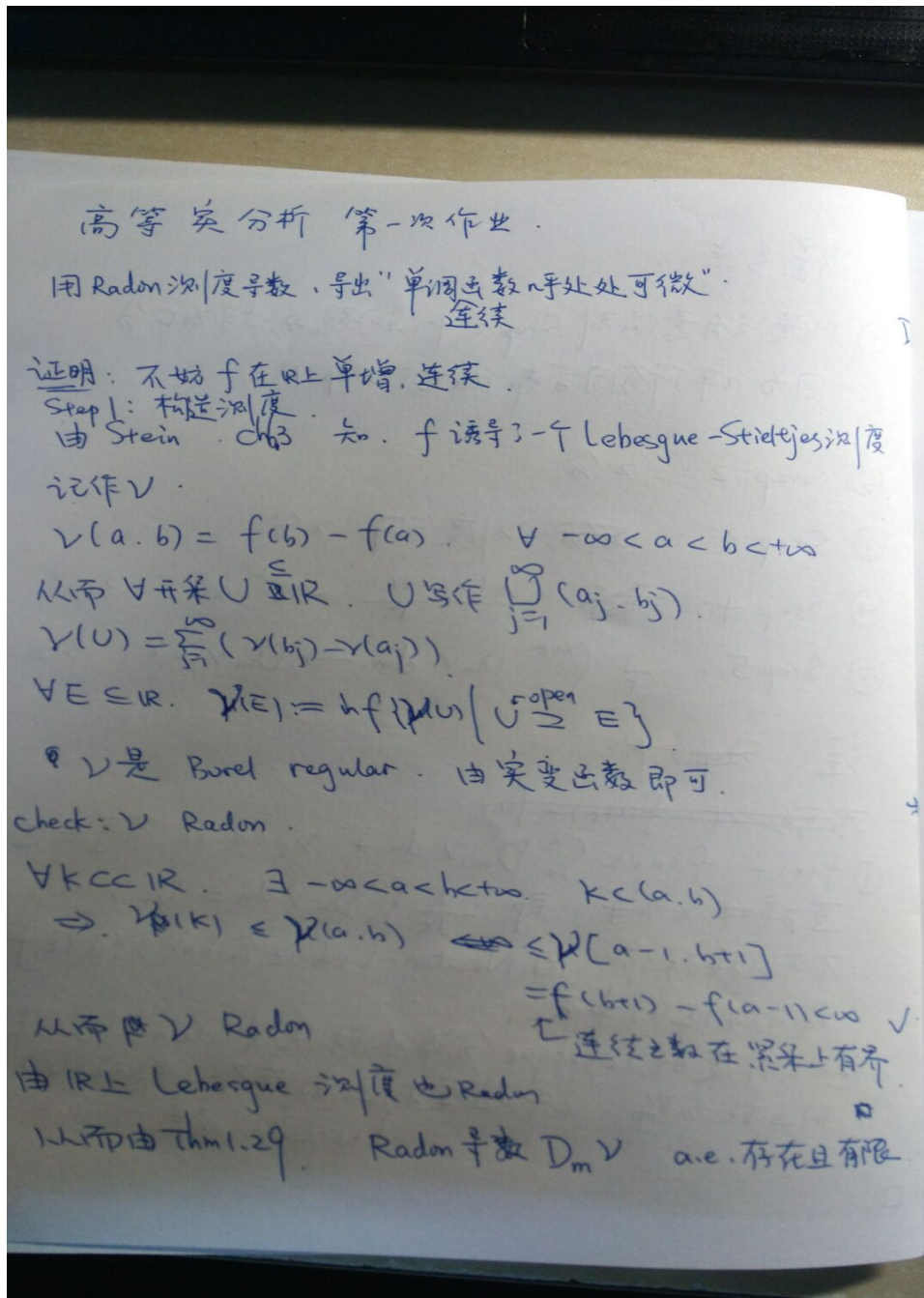


# 高等实分析第一次作业

## 参考解答

章俊彦 zhangjy9610@gmail.com

2016.11.1



Step 2: 发现一个问题.

$$D_m V = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{V(B(x, r))}{m(B(x, r))} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{f(x+r) - f(x-r)}{2r} \quad \text{...}$$

$$\stackrel{?}{=} \cancel{\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{f(x+r) - f(x)}{r}}$$

Step 3: 测度分解

由 Radon-Nikodym 定理

存在 Radon 测度  $\nu_{ac}, \nu_s$  满足

$$V = \nu_{ac} + \nu_s \quad \nu_{ac} \ll m, \nu_s \perp m$$

$$D_m \nu_{ac} \stackrel{ae.}{=} D_m V$$

且  $\forall A \subseteq \mathbb{R}, A$  Borel, 有:

$$\nu(A) = \int_A D_m \nu_{ac} dm + \nu_s(A)$$

特别地, 不妨  $r > 0$ , 取  $A = (x, x+r)$  有

$$V(x, x+r) = \int_x^{x+r} D_m V dm + \nu_s(x, x+r)$$

$$\text{"}$$

$$f(x+r) - f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+r) - f(x)}{r} = \frac{1}{r} \int_x^{x+r} D_m V dm + \frac{1}{r} \nu_s(x, x+r)$$

... (\*)

$$\text{Step 4: } \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{v_S(x, x+r)}{r} = 0 \quad \text{a.e.}$$

$$\begin{aligned} \text{这因为 } \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{v_S(x, x+r)}{r} &\leq \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{v_S(x-r, x+r)}{2r} \\ &= 2 \overline{D_m v_S} \\ &\stackrel{v_S \text{ Radon}}{=} 2 D_m v_S \stackrel{\square v_S \perp m}{=} 0 \quad \text{a.e.} \end{aligned}$$

$$\text{Step 5: } \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r} \int_x^{x+r} D_m v \, dm = D_m v \quad \text{a.e.}$$

~~By Radon~~

$$\textcircled{1} D_m v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$$

$$\forall K \subset \subset \mathbb{R}$$

$$\int_K D_m v \, dm \leq v(K) \stackrel{\text{Radon}}{\leq} +\infty$$

$\textcircled{2}$  By Lebesgue differentiation thm.

$$\frac{1}{r} \int_x^{x+r} D_m v \, dm \rightarrow D_m v \quad \text{a.e. as } r \rightarrow 0^+$$

由 Step 4.5 代入 (\*) 式 令  $r \rightarrow 0^+$  即有

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{f(x+r) - f(x)}{r} \stackrel{\text{a.e.}}{=} D_m v$$

$r < 0$  同理  
证毕!

得分点:

① 凡是没意识到 Step 2 中问题的, 均为 0 分。  
因为几乎所有同学都做完了 step 1.

② Step 2: 2 分.

③ Step 3: ~~2 分~~ 测度分解 2 分.

④ Step 4: ~~2 分~~  $\frac{V_S(x, x+r)}{r} \rightarrow 0$  a.e. 3 分.

⑤ Step 5:  $\frac{1}{r} \int_x^{x+r} D_m v \, d\mu \rightarrow D_m v$  a.e. 3 分.

注: Step 5 中.

~~不可以对  $f(x+r) - f(x)$~~

①  $f(x) - f(a) = \int_a^x D_m v \, d\mu + V_S(a, x)$ . 不可两边  
直接对  $x$  求导. 即  $\frac{d}{dx} \int_a^x D_m v \, d\mu = D_m v(x)$ .

不可直接操作. 因 Newton-Leibniz 公式成立依赖于  
我们要证的事实.

② 测度的 Lebesgue 分解不能换成 Stein ch3 习题 24  
的函数分解. 24 题要求函数有界 (书上没说).  
{ N-L 公式成立.