Ch 6 习题：本节假设 L 一致椭圆，$U\subset\mathbb{R}^n$ 为有界开集，$\partial U\in C^\infty$.

[6.1] 考虑带位势 c 的 Laplace 方程 $-\Delta u+cu=0 \cdots (*)$

和散度形式的方程 $-\mathrm{div}(aDv)=0$ $\quad a\geq 0$.

(1) 证明：若 u 为 $(*)$ 的解，$w>0$ 也是 $(*)$ 的解，则 $v=\frac{u}{w}$ 是 $(**)$ 的解 $(a=w^2)$

(2) 反之，若 v 是 $(**)$ 的解，则 $u=va^{\frac{1}{2}}$ 是 $(*)$ 的解，(对某个位势 c).

证明：(1). $\quad -\Delta u+cu=0,\quad -\Delta w+cw=0$

$$v=\frac{u}{w}$$

$$\Rightarrow \partial_i v=\frac{\partial_i u\cdot w-u\cdot\partial_i w}{w^2} \quad \cancel{\Rightarrow a\partial_i v=\frac{a\partial_i u\, w-au\partial_i w}{w^2}}$$

$$\cancel{\mathrm{div}(aDv)}=\sum_{i=1}^n\partial_i(a\partial_i v)$$

$$\cancel{=\sum_{i=1}^n\partial_i a\,\partial_i v+\sum_{i=1}^n a\cdot\partial_i\partial_i v}.$$

$$\cancel{=\sum_{i=1}^n\partial_i a\cdot\frac{\partial_i u\cdot w-u\partial_i w}{w^2}+\sum_{i=1}^n a\cdot\frac{\partial_i(\partial_i u\cdot w-u\partial_i w)w^2-2w\partial_i w(\partial_i u\cdot w-u\partial_i w)}{w^4}}$$

$$a=w^2\Rightarrow a\partial_i v=\partial_i u\cdot w-\partial_i w\cdot u$$

$$\mathrm{div}(aDv)=\sum_{i=1}^n a\partial_i(\partial_i u\,w-\partial_i w\cdot u)$$

$$=\sum_{i=1}^n(\partial_i\partial_i u\cdot w+\partial_i u\partial_i w-\partial_i w\partial_i u-\partial_i\partial_i w\cdot u).$$

$$=\Delta u\cdot w-\Delta w\cdot u$$

$$=cuw-cuw=0.$$

(2). 若 $-\mathrm{div}(aDv)=0$.

则 $\sum_{i=1}^n\partial_i(a\partial_i v)=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n\partial_i a\cdot\partial_i v+a\sum_{i=1}^n\partial_i\partial_i v=0$

$$-\Delta u+cu\overset{u=a^{\frac{1}{2}}v}{=\!=}-\sum_{i=1}^n\partial_i\partial_i(va^{\frac{1}{2}})+cva^{\frac{1}{2}}.$$

$$=cva^{\frac{1}{2}}-\sum_{i=1}^n\partial_i\left(\partial_i v\cdot a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}\partial_i a\cdot v\right)$$

$$=cva^{\frac{1}{2}}-\sum_{i=1}^n\Big(\partial_i\partial_i v\cdot a^{\frac{1}{2}}+\partial_i v\cdot\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}\partial_i a+\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}\partial_i a\,\partial_i v+(\partial_i\partial_i(a^{\frac{1}{2}}))v\Big).$$

$$=cva^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n\partial_i a\,\partial_i v+a\partial_i\partial_i v\right)}_{=0}-\sum_{i=1}^n(\partial_i\partial_i a^{\frac{1}{2}})v.$$

$$=v(ca^{\frac{1}{2}}-\Delta\sqrt{a})$$

取 $c=\frac{\Delta\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ 即可 $\square$

[6.2]. 设 $Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a^{ij}\partial_i u) + cu$.

证明：存在常数 $\mu > 0$ s.t. 在 $c(x) \geq -\mu$ $(x \in U)$ 的条件下，$B[\cdot,\cdot]$ 满足 Lax-Milgram 定理条件

证明： $B[u,v] = \sum_{i,j=1}^{n} \int_U a^{ij}\partial_i u \partial_j v + cuv \quad \forall u,v \in H_0^1(U)$

① $$|B[u,v]| \leq \|a^{ij}\|_{L^\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \int_U |\partial_i u||\partial_j v| + \|c\|_{L^\infty} \int_U |u|\cdot|v| \, dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} C\left(\|Du\|_{L^2}\|D_j v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}\right)$$

$$\leq C\left(\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}\right)$$

② $$|B[u,u]| = \int \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_i u \partial_j u + cu^2$$

$$\overset{\text{L一致椭圆}}{\geq} \theta\|Du\|_{L^2}^2 + \int cu^2$$

~~$u \in H_0^1$，由 Poincaré 不等式 $\|u\|_{L^2} \leq C'\|Du\|_{L^2}$ (for some $C' > 0$).~~

$$\cancel{\geq}$$

$$\cancel{= \theta\|Du\|_{L^2}^2 + (c+\mu)\|u\|_{L^2}^2 - (\mu)\|u\|_{L^2}^2}$$

~~Poincaré 不等式：因 $u \in H_0^1(U)$，故 $\exists C' > 0$，$\|u\|_{L^2} \leq C\|Du\|_{L^2}$.~~

$$\cancel{\geq (\theta - c^2\mu - c^2\varepsilon_0)\|Du\|_{L^2}^2 + (c+\mu+\varepsilon_0)\|u\|_{L^2}^2}$$

~~取 μ 满足 $\theta - c^2\mu - c^2\varepsilon_0 > \varepsilon_0$，即 $\mu \leq$~~ $\theta - (1+\frac{1}{c^2})\varepsilon_0$

~~即可.~~

$$\cancel{\geq \theta\|Du\|_{L^2}^2 - c(C')^2\|Du\|_{L^2}^2}$$

$$= \theta\|Du\|_{L^2}^2 + \int c(+\mu+\varepsilon)u^2 - (\mu+\varepsilon)\int u^2$$

Poincaré: $\forall u \in H_0^1(U)$, then $\exists C' > 0$, $\|u\|_{L^2} \leq C'\|Du\|_{L^2}$.

$$\geq \theta\|Du\|_{L^2}^2 + \int c(+\mu+\varepsilon)u^2 - (\mu+\varepsilon)(C')^2\|Du\|_{L^2}^2$$

取 $(\mu+\varepsilon)(C')^2 = \frac{\theta}{2}$ (ε充分小) 于是

上式 $\geq \frac{\theta}{2}\|Du\|_{L^2}^2 = \frac{\theta}{4}\|Du\|_{L^2}^2 + \frac{\theta}{4}\|Du\|_{L^2}^2$

$$\overset{\text{Poincaré}}{\geq} \frac{\theta}{4}\|Du\|_{L^2}^2 + \frac{\theta}{4}\frac{1}{C'}\|u\|_{L^2}^2$$

$$\geq \min\left\{\frac{\theta}{4}, \frac{\theta}{4}\frac{1}{C'}\right\}\|u\|_{H_0^1}^2$$

□

[6.3] $u\in H_0^2(U)$是如下边值问题 $\begin{cases}\Delta^2 u = f & \text{in } U\\ u=\frac{\partial u}{\partial \nu}=0. & \text{on } \partial U\end{cases}$ 的弱解，若 $\int_U \Delta u \Delta v\, dx = \int_U fv\, dx \quad \forall v\in H_0^2(U)$

今给定 $f\in L^2(U)$，证明该方程存在唯一弱解

证明：令 $B[u,v]=\int_U \Delta u\Delta v\, dx$

① $|B[u,v]| = \int_U |\Delta u|\cdot|\Delta v|\, dx$

$\underset{\text{Hölder}}{\leq} C\|D^2u\|_{L^2}\|D^2v\|_{L^2}$

$\underset{u,v\in H_0^2(U)}{\leq} C'\|u\|_{H_0^2}\|v\|_{H_0^2}$

由Poincare 知. $\|u\|_2$, $\|Du\|_2$ 由 $\|D^2u\|_2$ 控制)

② $B[u,u] \overset{\text{先设}u\in C_c^\infty(U)}{=\!=} \int_U \Delta u\Delta u\, dx$ ~~$|\Delta u|\cdot|\Delta u|$~~

$= \sum_{j,k=1}^n \int \partial_j^2 u\, \partial_k^2 u\, dx$

$\overset{\text{分部积分}}{=} -\sum_{j,k=1}^n \int \partial_j u\cdot \partial_j\partial_k^2 u\, dx.$

$\overset{\text{再分部积分}}{\underset{\partial_j\partial_k^2=\partial_k(\partial_j\partial_k)}{=}} \sum_{j,k=1}^n \int(\partial_j\partial_k u)^2 dx = \|D^2u\|_{L^2}^2$

$\underset{\text{Poincaré}}{\geq} c\left(\|D^2u\|_{L^2}^2+\|u\|_{L^2}^2+\|Du\|_{L^2}^2\right)$

$= c\|u\|_{H_0^2(U)}^2$

~~对一般的 $u\in H_0^2(U)$ 可以找到一列 $u_n\in C_c^\infty(U)$~~

~~s.t. $\|u_n-u\|_{H_0^2(U)}\to 0$ as $n\to\infty$.~~

对一般的 $u\in H_0^2(U)$. $\exists\{u_n\}\subset C_c^\infty(U)$ s.t. $\|u_n-u\|_{H_0^2(U)}\to 0$

故 $\|u_n\|_{H_0^2}\to\|u\|_{H_0^2}$.

$\left|\|\Delta u_n\|_{L^2}^2-\|\Delta u\|_{L^2}^2\right| \leq \|\Delta(u_n-u)\|_{L^2}^2 \leq C\|D^2(u_n-u)\|_{L^2}^2\to 0$

$\therefore B[u,u]\geq c\|u\|_{H_0^2(U)}^2$ 对 $u\in H_0^2(U)$ 成立.

那么由①②，据 Lax-Milgram 定理知. $\exists!\, u\in H_0^2(U)$

s.t. $\forall v\in H_0^2(U)$, $B[u,v]=(f,v)_{L^2}$. given $f\in L^2$.

□

4. 设 U 是连通开集，称 $u\in H^1(U)$ 是 $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的弱解，若 $\int_U Du\cdot Dv\,dx = \int_U fv\,dx$ $\forall v\in H^1(U)$

设 $f\in L^2(U)$. 证明该方程弱解存在 $\Leftrightarrow$ $\int_U f\,dx = 0$

证明: $\Rightarrow$: 反证: 若 $\int_U f\ dx = 0$.

则设 u 为该方程的弱解. (因U有界)

$$\int Du\cdot Dv \underset{\uparrow}{=} \int Du\cdot D(v-\langle v\rangle) \overset{v-\langle v\rangle\in H^1(U)}{\underset{\text{由弱解定义}}{=\!=}} \int f(v-\langle v\rangle)$$

$\langle v\rangle = \frac{1}{|U|}\int_U v\,dx \in \mathbb{R}$.

$$= \int_U fv - \langle v\rangle \underbrace{\int f}_{\neq 0} \neq \int fv$$

只要取 $\langle v\rangle \neq 0$ 即可

这与 $\forall v\in H^1(U)$. $\int_U Du\cdot Dv = \int_U fv$ 矛盾!

于是 $\int f\ dx = 0$

$\Leftarrow$: 若 $\int_U f\,dx = 0$.

设 $H^1_\sigma(U) = \{v\in H^1(U) \mid \langle v\rangle = 0\}$ Hilbert空间, $\langle v\rangle := \frac{1}{|U|}\int_U v\,dx$

内积 $(u,v)_{H^1_\sigma} = \int_U Du\cdot Dv\,dx$.

$F(v) = \int_U fv\ dx$: $H^1_\sigma(U) \longrightarrow \mathbb{R}$

$v \longmapsto \int_U fv\,dx$ 为 $H^1_\sigma(U)$ 上的连续线性泛函.

由Riesz表示定理, 存在唯一 $u\in H$ s.t.

$F(v) = (u,v)_{H^1_\sigma} \Rightarrow \int_U Du\cdot Dv = \int_U fv$ 从而得证

check: $H^1_\sigma(U)$ 是Hilbert空间;

只用check ①: $\langle u,u\rangle_{H^1_\sigma} = 0$ iff $u=0$. 这是因为 $\langle u,u\rangle_{H^1_\sigma} = \|Du\|^2_{L^2} = 0$

$\Rightarrow$ U 连通, 故由 Poincaré 不等式 $\|u-\langle u\rangle\|_{L^2} \le C\|Du\|_{L^2} = 0$

$\Rightarrow u = \langle u\rangle$ a.e. 又 $u\in H^1_\sigma(U)$ 故 $\langle u\rangle = 0$ $\Rightarrow u=0$ a.e.

② $\|\cdot\|_{H^1_\sigma}$ 与 $\|\cdot\|_{H^1}$ 等价. 这由 Poincaré 不等式易得.

[5]. $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u + \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 考问：如何定义 H^1 弱解？
给定 $f \in L^2(U)$ 时，如何证明解的存在唯一性？

Proof：令 $B[u,v] = \int_U Du \cdot Dv \, dx + \int_{\partial U} Tr u \cdot Tr v \, d\mathcal{H}^{n-1}$. $\forall u, v \in H^1(U)$.

这么定义是因为，假设 $u, v \in C^\infty(U)$，则

$$\int -\Delta u \cdot v \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauss 公式}}}{=} \int Du \cdot Dv - \int_{\partial U} v \, Du \cdot \vec{\nu} \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

$$= \int_U Du \cdot Dv - \int_{\partial U} v \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}}_{= -u} d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$= \int_U Du \cdot Dv + \int_{\partial U} u \cdot v \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

① $|B[u,v]| \le C \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$ 是显然的（由迹定理易得）.

② 下证：$B[u,u] = \int_U Du \cdot Du \, dx + \int_{\partial U} (Tr u)^2 \, d\mathcal{H}^{n-1}$.

$\overset{\exists \beta > 0}{\geqslant} \beta \|u\|^2_{H^1(U)}$ $\quad \forall u \in H^1(U)$.

反证：若不成立，则 $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ $\exists u_n$. $\|u_n\|^2_{H^1(U)} = 1$

$n B[u_n, u_n] < \|u_n\|^2_{H^1(U)} = 1$.

故 $B[u_n, u_n] < \frac{1}{n}$

由于 $\{u_n\} \subset H^1(U)$ 一致有界. 由 Banach-Alaoglu 定理，

$\exists$ 子列 $u_{n_k} \rightharpoonup$ for some $u \in H^1(U)$. in $H^1(U)$

由 $H^1(U) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(U)$ (Rellich-Kondrachov). 故

$u_{n_k} \to u$ in $L^2(U)$.

但 $\|Du_{n_k}\|^2_{L^2} \le B[u_{n_k}, u_{n_k}] \le \frac{1}{n_k} \to 0$ as $k \to \infty$

中国科学技术大学

5月6日 习题课.

[6.6] U 连通, ∂U 由两不交闭集 Γ_1 Γ_2 构成. 请定义如下方程的弱解.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \Gamma_2 \end{cases}$$

并讨论存在、唯一性

证明: $H_0^1(U) := H^1(U) \cap \{u \mid Tr\, u|_{\Gamma_1} = 0\}$

在 $H_0^1(U)$ 上定义 $B[u,v] = \int \nabla u \cdot \nabla v$.

则 $H_0^1(U)$ 是 $H^1(U)$ 的闭子空间

定 称 $u \in H_0^1(U)$ 是原方程的弱解. 若 $\forall v \in H_0^1(U)$. $B[u,v] = \int_U f v \, dx$

· 为什么? 形式上: 对 C^∞ 函数

$$\int_U -\Delta u \cdot v = \int_U f v$$

$$\| $$

$$\int_{\partial U} -\nabla u \cdot \vec{\nu} \cdot v \, dx + \int_U \nabla u \cdot \nabla v$$

$$= \int_U \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v \quad \begin{cases} \Gamma_1 & u = 0 \leftarrow \text{这部分应用 } u \in C_c^\infty \text{ 考虑} \\ \Gamma_2 & \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \leftarrow \text{条件}. \end{cases}$$

剩下与 5 的证明类似. (Lax-Milgram). $\square$

中国科学技术大学

Fredholm二择一与椭圆算子特征值问题:

·二择一: Lax-Milgram定理只回答了 $L+\mu\cdot I$ 在 μ 较大时,对应椭圆方程∃!的 H_0^1 弱解,但一般情况如何,不得而知.
事实上,一般情况会出现"二择一",这与线代类似.

Given $f\in L^2(U)$

Case 1: $\begin{cases} Lu=f & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ ∃!弱解.

且∃!弱解 $\Leftrightarrow$ $\forall v\in N^*$ $\langle f,v\rangle=0$

Case 2: 存在非零弱解

$\begin{cases} Lu=0 & \text{in } U \\ u=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$, 解空间 $N\subset H_0^1(U)$ 满足 $\dim N=\dim N^*<+\infty$

N^*是 $\begin{cases} L^*v=0 & \text{in } U \\ v=0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ ~~的解空间~~

方法: $B_\gamma[u,v]=B[u,v]+\gamma(u,v)$.

$L_\gamma u=Lu+\gamma u$.

$\forall g\in L^2$. ∃! $u\in H_0^1(U)$. $B_\gamma[u,v]=(g,v)$. $\forall v\in H_0^1(U)$

$u=L_\gamma^{-1}g=L_\gamma^{-1}(\gamma u+f)\xRightarrow{K=\gamma L_\gamma^{-1}}u(I-K)u=h:=L_\gamma^{-1}f.$

再用Fredholm二择一

1101C-08 201412·2500

在如上判定准则下，特征值问题的解

$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

· ∃! 弱解 $\Longleftrightarrow$ $\lambda \notin \Sigma$ 　λ 不在 L 的谱里面即可

一个 $\lambda \in \Sigma$ 的例子：　$U = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{5}{4} u = a x_1 + b x_2 + c & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

在此 U 上，先考虑

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

如何解？分离变量：　$u = f(x_1) g(x_2)$

代入 $\Rightarrow$ $f'' g + f g'' + \lambda f g = 0$，　$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + \lambda = 0$.

设 $-s^2 = \frac{f''}{f}$

$-t^2 = \frac{g''}{g}$　　　$s^2 + t^2 = \lambda$.

$$\begin{cases} f'' + s^2 f = 0 \\ f(0) = f(2\pi) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} g'' + t^2 g = 0 \\ g(0) = g(2\pi) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) = C_k \sin(\frac{k}{2} x)$.　　$g(x) = C_l \sin(\frac{l}{2} x)$

$\lambda = \frac{k^2 + l^2}{4}$

主特征值

$k, l = 1$.　　$\lambda_1 = \frac{1}{2}$　　　$u_0(x_1, x_2) = \sin\frac{x_1}{2} \sin\frac{x_2}{2}$.

$$\left.\begin{matrix} k=1 & l=2 \\ k=2 & l=1 \end{matrix}\right\} \lambda_2 = \frac{5}{4} \qquad \begin{matrix} u_{12}(x_1, x_2) = \sin\frac{x_1}{2} \sin x_2 \\ u_{21}(x_1, x_2) = \sin x_1 \sin\frac{x_2}{2} \end{matrix}$$

⋮　　　⋮

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{5}{4} u = 0 & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

解空间应由 u_{12}, u_{21} 张成

∴ 原方程有解 $\Longleftrightarrow$ $(f, u_{12}) = 0$. $\quad f = ax_1 + bx_2 + c$

$(f, u_{21}) = 0$.

$\Rightarrow a = b = 0$. $\quad c \in \mathbb{R}$.

· Moreover: $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ 若 $\iint_{(0,2\pi)\times(0,2\pi)} v(x_1, x_2) \sin\frac{x_1}{2} \sin\frac{x_2}{2} \, dx_1 dx_2 = 0$.

则 $\|u\|_{L^2}^2 \le \frac{4}{5} \|Dv\|_{L^2}^2$

Pf: Consider:

$$\begin{cases} -\Delta W_{kl} = \lambda_k W_{kl}. & \text{in } U \\ W_k = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

$w_{kl} = \sin\frac{kx_1}{2} \sin\frac{lx_2}{2}$ $\quad$ $\{w_{kl}\}$ 为 L^2 的标正基.

$$v = \sum_{\substack{k=1 \\ l=1}}^{\infty} (v, w_{kl}) w_{k,l}.$$

Fact: $-\int_U \Delta w_k \cdot w_p = \lambda_k \int_U w_k w_p \, dx = \cancel{\lambda_k \|w_k}$

从而

$$\int_U |\nabla w_k|^2 dx = \lambda_k \int_U w_k^2 dx$$

$$\int_U \nabla w_k \nabla w_p \, dx = 0 \qquad k \ne p$$

$$\therefore \|\nabla v\|_{L^2}^2 = \int_\Omega \Big(\sum \underbrace{\alpha_{k.l}}_{\text{系数}} \nabla w_{kl}\Big)^2 dx = \sum \alpha_{kl}^2 \int_\Omega |\nabla w_{k.l}|^2 dx$$

$$= \sum \alpha_{kl}^2 \int_U \lambda_k w_k^2 dx \overset{\text{条件式, }\lambda_1\text{项消失}}{\ge} \sum \frac{5}{4} \int_U \alpha_{k.l}^2 w_k^2 dx$$

$$= \frac{5}{4} \int_U \Big(\sum \alpha_{kl} w_k\Big)^2 dx. = \frac{5}{4} \int_U |v|^2 dx. \qquad \square$$

7. 设 $u\in H^1(\mathbb{R}^n)$（具有紧支集）是 $-\Delta u + c(u) = f$ in $\mathbb{R}^n$ 的弱解.

其中 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$. $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是光滑函数. $c(0)=0$. $c'(x)\geq 0$

且 $c(u)\in L^2(\mathbb{R}^n)$. 证明：$\|D^2u\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2}$

证明：u 是 $-\Delta u + c(u) = f$ 的 H^1 弱解.

则 $\forall v\in H^1(\mathbb{R}^n)$.

$$\int_U \nabla u\cdot\nabla v + c(u)\cdot v\,dx = \int_U f v\,dx$$

取 $v = -D_k^{-h}D_k^h u$. $0<|h|<<1$. 则 $v\in H^1(\mathbb{R}^n)$ 且紧支.

代入：

$$\int_U Du\cdot(-D_k^{-h}D_k^h u)\,dx - \int_U c(u)D_k^{-h}D_k^h u\,dx = -\int f D_k^{-h}D_k^h u.$$

- D 与 D_k^h 可交换.
- 差商的形式分部积分

$$\Rightarrow \underbrace{\int_U |DD_k^h u|^2}_{\text{希望估计的是这项}} + \underbrace{D_k^h c(u)\cdot D_k^h u}_{\text{因此要先设法估计非线性项 } c(u) \text{ 带来的贡献}}\,dx = -\int f\cdot D_k^{-h}D_k^h u\,dx.$$

$$\int D_k^h c(u)(x)\, D_k^h u(x) = \int \frac{c(u(x+he_k)) - c(u(x))}{h}\cdot D_k^h u(x)$$

中值定理. $\exists\xi\in\mathbb{R}$

$$= \int c'(\xi)\cdot \frac{|u(x+he_k) - u(x)|}{h} |D_k^h u(x)|$$

$$= \int c'(\xi)\cdot |D_k^h u(x)|^2 \geq 0.$$

$$\Rightarrow \int_U |D_k^h Du|^2 \leq -\int f D_k^{-h}D_k^h u\,dx \leq \left|\int f D_k^{-h}D_k^h u\right|^2.$$

$$\leq C\|f\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|D_k^{-h}D_k^h u\|_{L^2}^2$$

$$\leq C\|f\|_{L^2}^2 + C\varepsilon\|D_k^h Du\|_{L^2}^2.$$

再用差商性质 $\varepsilon C < \frac{1}{2}$ 即可. □

椭圆方程正则性问题.

$Lu=f$ in U. $a^{ij}, b^i, c \in C^{k+1}(U)$. $f\in H^k(U)$

$\Rightarrow u\in H^{k+2}_{loc}(U)$. (符合常理).

但未必所有方程都有此性质(波方程. Schrodinger方程等)。
(形式上)

椭圆正则性：关注"最高正则性"

Schrodinger：低正则性问题

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = -|u|^2 u & \text{in } \mathbb{R}^3\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^3). & s<1. \end{cases}$$

之前：经典解：~~$C_t H'$~~ $C_t^0 H^1 \cap L_t^{8/3} L_x^4$ (若初值 H^1).

global existence? $s>\frac{11}{13}$. $\Rightarrow u\in C_t H_x^s(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

(Bourgain: Scattering in Energy space & below for 3D NLS)

椭圆方程正则性证明方法：① 用差商估计得到导数的估计.

② Bootstrap (高正则性)：

例如. $-\Delta u+\lambda u=f$. in U. $\partial U\in C^\infty$ $f\in C^\infty$

首先. 由 ~~Lax-M~~ 课本存在性理论. 某些 λ. 使得 $\exists u\in H^1$ 作为弱解.

再用内正则性之理有 $\|u\|_{H^2}\lesssim \|\Delta u\|_{L^2}+\|u\|_{L^2}$.

此时. $\left.\begin{array}{l}\Delta u=\lambda u-f\in L^2 \\ u\in H^2.\ f\in C^\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta u\in H^2 \xrightarrow{\text{Similarly}} u\in H^4$

$\Rightarrow \cdots \Rightarrow u\in H^{2k}$ (~~任意~~). $\Rightarrow u\in C^\infty$

1101C-08 201412-2500

对于解的可积性，也有类似的 Bootstrap 方法

$u \in H^1 = W^{1,2}$，若 $d \geq 2$.

则由 Sobolev 嵌入定理 $W^{1,2} \hookrightarrow L^{2^*} \Rightarrow 2^* = \frac{2d}{d-2} > 2$

$\Rightarrow \Delta u \in L^{2^*} \Rightarrow u \in W^{1,2^*}$.

$\Rightarrow$ repeatedly and derive ~~the~~ $u \in L^{d-\varepsilon}$ 起码不过 d.

否则 Sobolev 嵌入失效. □

椭圆正则性估计在处理一些其它方程时可能也会用到. 例如 Euler, Navier-stokes 方程的渐近稳定性，往往需要用极高的正则性来换取长时间的稳定性. Bootstrap 仍适用. 但对椭圆项的具体估计也许会用到调和分析.

椭圆方程的 ~~特征值问题、选择~~ 极大值原理：

弱极值原理：L 想像成"$-\Delta$".

强极值原理：U 连通

Hopf 引理：结论很直观.

习题：9. u 是 $\begin{cases} Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_{ij}u = f & \text{in } U \\ u = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的 C^∞ 解. f bdd.

Fix $x^0 \in \partial U$. Define "barrier" at x_0, to be a C^2 function

w: $\begin{cases} Lw \geq 1 & \text{in } U \\ w(x^0) = 0 & \\ w \geq 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$

证明：$\exists C > 0$

$$|\nabla u(x^0)| \leq C \left|\frac{\partial w}{\partial \nu}(x^0)\right|.$$

Proof：对 w：由弱大值原理，$\min\limits_{\bar U} w = \min\limits_{\partial U} w = w(x^0)$.

令 $v_1 = u + w\|f\|_{L^\infty}$ 则 $Lv_1 \geq 0$

$v_2 = u - w\|f\|_{L^\infty}$ $Lv_2 \leq 0$.

再由弱极大值原理：$\min\limits_{U} v_1 = \min\limits_{\partial U} v_1 = \|f\|_{L^\infty} \min\limits_{\partial U} w$

$= \|f\|_{L^\infty} w(x^0) = v_1(x^0)$.

$\max\limits_{\bar U} v_2 = v_2(x^0)$.

由Hopf引理.

$0 \geq \frac{\partial v_1}{\partial \nu}(x^0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0) + \|f\|_{L^\infty} \frac{\partial w}{\partial \nu}(x^0)$

$\leq \frac{\partial v_2}{\partial \nu}(x^0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0) - \|f\|_{L^\infty} \frac{\partial w}{\partial \nu}(x^0)$.

又：$u=0$ on ∂U 则 $\nabla u \parallel \vec{\nu}$

$\Rightarrow |\nabla u(x^0)| = \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0)\right| \leq \|f\|_{L^\infty} \left|\frac{\partial w}{\partial \nu}(x^0)\right|$ □

10. U连通 用(1) 能量法 (2) 极大值原理

证明：$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$ 的唯一光滑解为. $u = \text{const}$.

证明：(1) $I[w] = \frac{1}{2}\int_U |\nabla w|^2 \, dx$. $u = \text{const}$ 使 $I[w]$ 达到极小值 唯一Fix

(2) 若 u 在 U 内达极大值，那么由强极大值原理直接得证

若 $\sup\limits_{\partial U} u(x) = u(x^0)$ $x^0 \in \partial U$. 且 $\forall x \in U$. $u(x^0) > u(x)$

则 Hopf 引理表明：$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0) > 0$. 矛盾！ □

12. $Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_i u + cu.$

称L满足弱极大值原理，~~是~~是指 $\forall u\in C^2(U)\cap C(\bar U)$. 只要 $\begin{cases} Lu\le 0 & \text{in } U \\ u\le 0 & \text{on } \partial U\end{cases}$ 就有 $u\le 0$ in U

今假设存在 $v\in C^2(U)\cap C(\bar U)$ 使 $Lv\ge 0$ in U，$v>0$ on $\bar U$. 证明：L满足弱极大值原理

Proof：设 $u\in C^2(U)\cap C(\bar U)$. $Lu\le 0$ in U，$u\le 0$ on ∂U.

~~$v\in C(\bar U)$~~

$\Rightarrow$. $w := \frac{u}{v} \in C^2(U)\cap C(\bar U)$.

希望构造一个椭圆算子 M. 使 $Mw\le 0$ on $\{x\in\bar U \mid u>0\}\subseteq U$.

如果能做到. 那么假如 $\{x\in\bar U \mid u>0\}$ 非空.

由 M满足弱极大值原理. 则有

$$0 < \sup_{\{u>0\}} w = \sup_{\partial\{u>0\}} w = \frac{0}{v} = 0. \quad \text{矛盾！}$$

下面构造M. M 一致椭圆，为达到此目的，我们先保留二阶项不变.

计算：$-a^{ij}\partial_{ij}w = -a^{ij}\partial_i\partial_j\left(\frac{u}{v}\right)$.

$$= -a^{ij}\partial_i\left(\frac{\partial_j u\cdot v - \partial_j v\cdot u}{v^2}\right) = \cancel{a^{ij}}$$

$$= -a^{ij}\left(\partial_i\left(\frac{\partial_j u}{v}\right) - \partial_i\left(\frac{\partial_j v\cdot u}{v^2}\right)\right)$$

$$= -a^{ij}\left(\frac{\partial_i\partial_j u\cdot v - \partial_j u\,\partial_i v}{v^2} - \frac{-2v\partial_i v\partial_j v u + v^2\cdot\partial_i\partial_j v\cdot u + v^2\partial_j v\partial_i u}{v^4}\right)$$

$$= \frac{-a^{ij}\partial_{ij}u\, v + a^{ij}\partial_{ij}v\cdot u}{v^2} + \frac{a^{ij}\partial_i v\partial_j u - a^{ij}\partial_i u\partial_j v}{v^2} - a^{ij}\cdot\frac{2}{v}\partial_j v\frac{u\partial_i\cdot v - \partial_i u\cdot v}{v^2}$$

$a^{ij}=a^{ji}$

$$= \frac{(Lu - \partial_j b^i \partial_i u - cu)v + (-Lv + \partial_j b^i \partial_i v + cv)u}{v^2} + 0 + a^{ij}\frac{2}{v}\partial_j v\,\partial_i w$$

$$= \frac{Lu}{v} - \frac{uLv}{v^2} - b^i\partial_i w + a^{ij}\frac{2}{v}\partial_j v\,\partial_i w$$ （上下指标表示求和）.

令 $Mw = -a^{ij}\partial_{ij} w + \partial_i w\left(b^i - a^{ij}\frac{2}{v}\cdot\partial_j v\right)$

$$= \frac{Lu}{v} - \frac{uLv}{v^2} \le 0 \quad \text{on } \{x\in\bar U \mid u>0\}\subset U$$

为何? $Lu\le 0$, $v>0$; $u>0$, $Lv>0$

M一致椭圆显然.

□

更一般的极大值原理. $Lu = \partial_i(a^{ij}\partial_j u + b^i u) + c^i\partial_i u + du$.

设 $\begin{cases} a^{ij}\xi_i\xi_j \ge \lambda|\xi|^2 \\ \sum|a^{ij}(x)|^2 \le \Lambda^2 \\ \frac{1}{\lambda^2}\sum(|b^i|^2+|c^i|^2) + \frac{1}{\lambda}|d(x)| \le \nu^2 \end{cases}$

Consider $\begin{cases} Lu = g + \sum_i \partial_i f^i & \text{in } U \\ u=\varphi & \text{on } \partial U \end{cases}$

$U\subset\mathbb{R}^d$, $f^i\in L^q(U)$, $g\in L^{q/2}(U)$, $q>d$.

u为弱下(上)解, $u\le 0$ ($u\ge 0$) on ∂U. 则 $\sup_U \begin{matrix}+u\\-u\end{matrix} \le C\left(\left\|\begin{matrix}u^+\\u^-\end{matrix}\right\|_{L^2} + k\right)$

$k = \frac{1}{\lambda}\left(\|\vec f\|_q + \|g\|_{q/2}\right)$

方法: De-Giorgi-Moser 迭代

证明思路：$\bar{u}^+ := u^+ + k$ （对弱下解）.

$$H(z) = \begin{cases} z^\beta - k^\beta & k \le z \le N \\ \text{linear} & z \ge N \end{cases} \qquad \underline{N > k}$$

只考虑 $d > 2$：

先证：$\|H(\bar{u}^+)\|_{\frac{2d}{d-2}} \lesssim \|\cancel{b}\|_{q/2}^{1/2} \|\bar{u}^+ \cdot H'(\bar{u}^+)\|_{2q/(q-2)}$.

$q > 2^* = \frac{2d}{d-2}$.

下面令 $N \to \infty$

Fact：$\forall \beta \ge 1$. $\bar{u}^+ \in L^{\frac{2\beta q}{q-2}} \Longrightarrow \bar{u}^+ \in L^{\frac{2\beta d}{d-2}}$

$q^* := \frac{2q}{q-2}$. , $\eta = \cancel{\frac{d}{q(d-2)}} \frac{2d/(d-2)}{2q/(q-2)} > 1$

$$\|\bar{u}^+\|_{\beta\eta q^*} \lesssim_\beta \|\bar{u}^+\|_{\beta q^*}$$

不断迭代：$\|\bar{u}^+\|_{\eta^N q^*} \lesssim \prod_{n=0}^{N-1} \|\bar{u}^+\|_{q^*}$. . $\bar{u}^+ \in \bigcap_{1 \le p < \infty} L^p(U)$

$N \to \infty$ $\Rightarrow \|\bar{u}^+\|_\infty \lesssim \|\bar{u}^+\|_{q^*}$.

$\Rightarrow \|\bar{u}^+\|_\infty \lesssim \|\bar{u}^+\|_{L^2}$.

□

具体：参见

Gilbarg, Trudinger: Elliptic PDEs of 2nd order.

Chapter 8.5 – 8.6.

local property 更加精细.

中国科学技术大学

能量法(变分)

思路：方程的解 看作能量泛函的极小值点

难点：给定方程，如何找到能量泛函？

人为观察、套固定的

~~结论~~：对Laplace方程：

结论：

① $u\in C^2(\bar{U})$ solves $\begin{cases}-\Delta u=f & \text{in } U\\ u=g & \text{on } \partial U\end{cases}$ $\iff$ $I(u)=\inf\limits_{w\in\mathcal{A}} I[w]$

其中 $\mathcal{A}=\{w\in C^2(\bar{U})\mid w=g \text{ on } \partial U\}$

$I[w]=\int_U \frac{1}{2}|\nabla w|^2-fw\,dx.$

② u solves $\begin{cases}-\Delta u=f\in C(\bar{U})\\ \frac{\partial u}{\partial n}=g\in C(\partial U)\end{cases}$ $\iff$ $I(u)=\inf\limits_{w\in\mathcal{A}} I[w]$

$\mathcal{A}=\{w\in C^2(\bar{U})\cap C^1(\bar{U}) \mid \cancel{\frac{\partial w}{\partial n}=g \text{ on } \partial U},\ \int_U w\,dx=0\}.$

$I[w]=\int_U \frac{1}{2}|\nabla w|^2-fw\,dx-\int_{\partial U} wg\,ds$

③ $\begin{cases}-\Delta u=f\in C(\bar{U})\\ \alpha(x)u+\frac{\partial u}{\partial n}=g\in C(\partial U).\end{cases}$

u solves ... $\iff$ $I[u]=\inf\limits_{w\in\mathcal{A}} I[w]$ 其中 $\mathcal{A}=C^2(U)\cap C^1(\bar{U})$

$I[w]=\int_U \frac{1}{2}|\nabla w|^2-fw\,dx+\int_{\partial U}\left(\frac{1}{2}\alpha w\right)^2-gw\,ds.$

给出①的证明

$\Rightarrow$ 若u为原方程解. 对 $\forall w \in \mathcal{A}$

$$I[w] = \cancel{\tfrac{1}{2}}\int_U \frac{|\nabla w|^2}{2} - fw\,dx$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{2}}\int_U \frac{|\nabla w|^2}{2} + \Delta u\, w\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_U |\nabla w|^2 + \sum_i \int_U \partial_i(\partial_i u\, w) - \partial_i w\, \partial_i u\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_U |\nabla w|^2 + \int_{\partial U} \nabla u \cdot w \cdot \vec{n}\,dS - \int_U \nabla u \cdot \nabla w\,dx$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_U |\nabla w|^2 + \int_{\partial U} w \cdot \frac{\partial u}{\partial n}\,ds - \int_U \frac{|\nabla u|^2 + |\nabla w|^2}{2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_U |\nabla u|^2\,dx + \int_{\partial U} u \cdot \frac{\partial u}{\partial n}\,ds \leftarrow \underline{\underline{w = g = u \text{ on } \partial U}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_U |\nabla u|^2\,dx + \int_U \partial_i(\partial_i u \cdot u)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_U |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega fu\,dx.$$

$\boxtimes$

$\Leftarrow$: $\forall v \in C_c^\infty(U)$. $u + tv \in \mathcal{A}$ t小.

$i(t) := I[u+tv]$

$i(t)$ 在 $t=0$ 极小. $\therefore i'(0) = 0$

$$\Rightarrow i(t) = I[u+tv] = \frac{1}{2}\int_U |\nabla u + t\nabla v|^2\,dx - \int_U fu - \int_U tfv\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 + t\,\nabla u \cdot \nabla v + \frac{t^2}{2}|\nabla v|^2 - fu - tfv\,dx$$

$i'(0) = 0$ 代入为

$$0 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - fv\,dx = \int_\Omega (-\Delta u - f)v\,dx.$$

$$\Rightarrow -\Delta u = f$$

$\square$

关于极大值原理，有一套是构造神奇的辅助函数来应用

中国科学技术大学

例如：1. $u\in C^3(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$.

p. $\begin{cases}\Delta u-2u=f \\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$ $\Omega=B^\circ(0,1)\subset\mathbb{R}^2$ $f\in C(\bar\Omega)$. $\varphi\in C(\partial\Omega)$.

则 $\sup\limits_{\bar\Omega}|u|\le\sup\limits_{\partial\Omega}|\varphi|+\sup\limits_{\bar\Omega}|f|$

Proof: $F=\sup\limits_{\Omega}|f|$. $\Phi:=\sup\limits_{\partial\Omega}|\varphi|$

$W:=\Phi+\frac{1-|x|^2}{4}F\ \ge0$ in Ω.

$\Delta w=-F\le0$

$\Rightarrow \Delta w-2w=-F-\underset{\substack{\uparrow\\ w\ge0}}{2w\le}-F\underset{\substack{\uparrow\\ F定义}}{\le}\pm f=\Delta(\pm u)-2(\pm u)$.

$w|_{\partial\Omega}=\Phi\ge\pm\varphi=\pm u|_{\partial\Omega}$

$\Rightarrow (\Delta-2)(w\mp u)\le0$ in Ω

$w\pm u\ge0$ on $\partial\Omega$

那么由极大值原理：$\pm u\le w=\Phi+\frac{1-|x|^2}{4}F\le\Phi+\frac{F}{4}$.

$\square$

2. 用于梯度估计

Global: 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 有界连通开. $u\in C^3(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$.

$\Delta u=f(x,u)\in C^1(\Omega\times\mathbb{R})\Rightarrow\sup\limits_{\Omega}|\nabla u|\le C+\sup\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|$.

Proof: $\varphi=|\nabla u|^2+\alpha u^2+\beta\frac{|x|^2}{2d}$. $\alpha,\beta>0$ 待定.

目标：$\Delta\varphi\ge0$. 从而 $\sup\limits_{\Omega}\varphi\le\sup\limits_{\partial\Omega}\varphi$.

即 $\sup\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\le\sup\limits_{\Omega}\varphi\le\sup\limits_{\partial\Omega}\varphi=\sup\limits_{\partial\Omega}|\nabla u|^2+C$

开方即可.

$$\Delta(|\nabla u|^2) = \sum_i \partial_i^2 \left(\sum_j |\partial_j u|^2\right).$$

$$= \sum_{i,j} \partial_i^2 (\partial_j u\, \partial_j u)$$

$$= \sum_{i,j} \left(2(\partial_{ij} u)^2 + 2(\partial_j u)(\partial_i^2 \partial_j u) \right)$$

$$= 2|\nabla^2 u|^2 + \cancel{2 \sum_j \partial_j u \cdot \nabla \partial_j u}$$

$$2 \nabla u \cdot \nabla f$$

$$= 2|\nabla^2 u|^2 + 2\sum_j \partial_j u\, \partial_{x_j} f$$

$$= 2|\nabla^2 u|^2 + 2\sum_j \partial_j u \cdot (\partial_j f + \partial_u f \cdot \partial_j u)$$

$$\Delta(u^2) = 2\partial_j (u \partial_j u) = 2|\nabla u|^2 + 2uf$$

$$\Rightarrow \Delta \varphi = 2|\nabla^2 u|^2 + 2\sum_j \partial_j u\, \partial_{x_j} f + 2|\nabla u|^2 \partial_u f + 2\alpha |\nabla u|^2 + 2\alpha u f + \beta$$

$$\geq 2|\nabla^2 u|^2 - (|\nabla u|^2 + |\nabla f|^2) - 2|\nabla u|^2 \|f\|_{C^1} + 2\alpha |\nabla u|^2 - (\alpha u^2 + \alpha \|f\|^2_{L^\infty}) + \beta$$

$$\geq 2|\nabla^2 u|^2 + (2\alpha - 2\|f\|_{C^1} - 1)|\nabla u|^2 - \|f\|^2_{C^1} - \alpha \|u\|^2_{L^\infty} - \alpha \|f\|^2_{L^\infty} + \beta$$

取 α: $2\alpha - 2\|f\|_{C^1} - 1 \geq 0$

取 β: $\beta - \|f\|^2_{C^1} - \alpha \|u\|^2_{L^\infty} - \alpha \|f\|^2_{L^\infty} \geq 0$

即可

$\square$