微分方程 2 第2次习题课

Ch5 习题 (讲 7. 8. 9. 10. 11; 17. 18 上次讲了) 此节设 $\partial U \in C^\infty$. U 有界.

7. U 有界开，且存在 C^∞ ~~向量场~~ $\vec{\alpha}$，使 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\nu} \geq 1$. (在 ∂U 上，$\vec{\nu}$ 为 ∂U 单位外法向量).

$1 \leq p < +\infty$

对 $\int_{\partial U} |u|^p \vec{\alpha}\cdot\vec{\nu}\, ds$ 用 Gauss-Green 公式，去对迹不等式给出另一证明:

$$\int_{\partial U} |u|^p\, ds \leq C\left(\int_U |Du|^p + |u|^p\, dx\right) \qquad \forall u \in C^1(\bar{U}).$$

证明: Green 公式内容是:

对函数 $u \in C^1(\bar{U})$. 有 $\int_U \partial_i u\, dx = \cancel{\int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial x_i} dS} =$

$$= \int_{\partial U} u \cdot \nu^i\, ds$$

对向量场 $\vec{u} \in C^1(\bar{U} \to \mathbb{R}^n)$, $\int_U \operatorname{div} \vec{u}\, dx = \int_{\partial U} \vec{u}\cdot\vec{\nu}\, ds$.

7 的证明:

$$\int_{\partial U} |u|^p dS \leq \int_{\partial U} \vec{\alpha}\cdot\vec{\nu}\, |u|^p\, ds.$$

$$= \int_{\partial U} (|u|^p \vec{\alpha})\cdot\vec{\nu}\, ds \underset{\text{用 Green 公式}}{=} \int_U \operatorname{div}(|u|^p \vec{\alpha})\, dx.$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_U \partial_i (|u|^p \alpha_i)\, dx.$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\int_U (\partial_i \alpha_i)\cdot |u|^p\, dx + \int_U \alpha_i\, \partial_i |u|^p\, dx\right)$$

$$= \int_U (\nabla\cdot\vec{\alpha})\, |u|^p\, dx + \int_U \vec{\alpha}\cdot\nabla(|u|^p)\, dx.$$

$$\leq C \int_U |u|^p + |\nabla(|u|^p)|\, dx.$$

$p=1$ 时. $\nabla|u| = \mathrm{sgn}(u)\cdot\nabla u$.

故迹不等式成立.

$p>1$ 时 $\int \nabla|u|^p\,dx = \int |u|^{p-1}\cdot|\nabla u|$

$$\underset{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1}{\overset{\text{Young不等式}}{\leq}} \int \frac{|u|^{(p-1)p'}}{p'} + \frac{|\nabla u|^p}{p}$$

$$\leq C'\int |u|^p + |\nabla u|^p\,dx$$

因此. $\int_{\partial U} |u|^p\,ds \leq C\int_U |u|^p + |\nabla u|^p\,dx$.

$\square$

8. 设 U 有界开, $\partial U\in C^1$. 证明: $T: L^p(U)\to L^p(\partial U)$, 使 $Tu = u|_{\partial U}$ 不存在.

$\forall u\in C(\bar{U})\cap L^p(U)$

证: 若存在这样的 T, 则为有界算子, 应找一列 $u_n\in L^p(U)$. 使得

$$\begin{cases} \|u_n\|_p \to 0 & \text{as } n\to\infty \\ \|Tu_n\|_p \not\to 0 & \text{as } n\to\infty \end{cases} \Rightarrow T\text{无界. 矛盾!}$$

令 $u_n = \begin{cases} 0 & \mathrm{dist}(x,\partial U) > \frac{1}{n} \\ 1-n\,\mathrm{dist}(x,\partial U) & \mathrm{dist}(x,\partial U)\leq\frac{1}{n} \end{cases}$

$u_n\in C(\bar{U})\cap L^p(U)$. 是可以直接证明的.

$$\lim_{n\to\infty}\int_U |u_n|^p \underset{\|u_n\|_p\leq\|u\|_p<\infty}{\overset{DCT}{=\!=}} \int_U \lim_{n\to\infty}|u_n|^p = 0.$$

但 $\int_{\partial U} u_n^p\,d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial U} 1\,d\mathcal{H}^{n-1} = ~~|\partial U| \neq 0~~$ $\mathcal{H}^{n-1}(\partial U)\neq 0$ → 即 ∂U 的 $n-1$ 维测度.

注: ∂U 上是对 ∂U 的 Lebesgue 测度 (此处用 $n-1$ 维 Hausdorff 测度表示. 是一样的)

$\therefore$ 不存在线性 $T: L^p(\partial U)\to L^p(U)$.

s.t. $Tu = u|_{\partial U}$

9. 对 $u\in C_c^\infty(U)$, $u\in H_0^1(U)\cap H^2(U)$ 证明: $\|Du\|_2 \le C\|u\|_2^{\frac12}\|D^2u\|_2^{\frac12}$

证明: ① $u\in C_c^\infty(U)$.

则 $\int_U |Du|^2dx = \sum_{i=1}^n \int_U \partial_i u\,\partial_i u.$

$\overset{分部积分}{=} -\sum_{i=1}^n \int u\cdot\partial_{ii}u.$

$= \cancel{\sum_{i=1}^n} -\int u\cdot\Delta u\,dx \le \int |u|\cdot|\Delta u|dx$

$\le C\int |u|\cdot|D^2u|\,dx \le C\|u\|_{L^2}\|D^2u\|_{L^2}.$

② $u\in H_0^1(U)\cap H^2(U)$.

则, $\exists\{v_k\}_1^\infty \subseteq C_c^\infty(U)$ $\quad v_k\to u$ in $H_0^1(U)$.

$\{w_k\}_1^\infty \in C^\infty(U)$ $\quad w_k\to u$ in $H^2(U)$.

先考虑: $\int_U Dv_k\cdot Dw_k\,dx$

$=\sum_{i=1}^n\int_U \partial_i(v_k)\,\partial_i(w_k)\,dx.$

$= -\sum_{i=1}^n\int_U v_k\,\partial_{ii}(w_k)\,dx.$

$= -\int_U v_k\Delta w_k.$

$\le \int_U |v_k||\Delta w_k|\,dx \le C\int_U |v_k|\cdot|D^2w_k| \le C\|v_k\|_2\|D^2w_k\|_2.$

再证明: (2.1) $\|v_k\|_2\|D^2w_k\|_2 \longrightarrow \|u\|_2\|D^2u\|_2.$

这因为: $\|v_k\|_2\|D^2w_k\|_2 - \|u\|_2\|D^2u\|_2.$

$= \|v_k\|_2(\underbrace{\|D^2w_k\|_2 - \|D^2u\|_2}_{\downarrow 0}) + \|D^2u\|_2(\underbrace{\|v_k\|_2 - \|u\|_2}_{\downarrow 0}) \to 0.$

(2.2). $\int_U Dv_k\cdot Dw_k\,dx \longrightarrow \int |Du|^2dx.$

作差: $\left|\int_U Dv_k\cdot Dw_k - \int Du\cdot Du\right| \le \left|\int_U Dv_k(Dw_k-Du)\,dx + \int Du(Dv_k-Du)\,dx\right|$

$\le \|Dv_k\|_2\|Dw_k-Du\|_2 + \|Du\|_2\|Dv_k-Du\|_2$

$\to 0$ as $k\to\infty$

□

10. 证明:

(1) $\|Du\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p}^{1/2}\|D^2u\|_{L^p}^{1/2}$. $u\in C_c^\infty(U)$. $1\leq p<\infty$

(2) $\|Du\|_{L^{2p}} \leq C\|u\|_{L^\infty}^{1/2}\|D^2u\|_{L^p}^{1/2}$.

Proof:

(1). $\int_U |Du|^p dx = \int_U |Du|^{p-2}\cdot|Du|^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_U (\partial_i u)^2 |Du|^{p-2} dx$.

$= \sum_{i=1}^n \int_U (\partial_i u)\cdot\left((\partial_i u)\cdot(Du)^{p-2}\right) dx$

$\underset{\substack{\text{分部积分}\\ u|_{\partial U}=0}}{=} -\sum_{i=1}^n \int_U u\cdot \partial_i(\partial_i u\cdot|Du|^{p-2}) dx$

$= -\sum_{i=1}^n \int_U u\cdot\partial_{ii}u\cdot|Du|^{p-2}dx - \int_U u\cdot\partial_i u\cdot\partial_i|Du|^{p-2}dx$.

① ②

$= -\underbrace{\int_U u\cdot\Delta u\cdot|Du|^{p-2}dx}_{I_1} - \underbrace{\int_U u\cdot Du\cdot D(|Du|^{p-2})\,dx}_{I_2}$

$\leq |I_1| + |I_2|$.

$|I_1| \leq C\int_U |u||D^2u|\cdot|Du|^{p-2}dx$

$\underset{\substack{\text{三元Hölder.}\\ \frac{p-2}{p}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p}=1}}{\leq} C\|u\|_{L^p}\|D^2u\|_{L^p}\cdot\underbrace{\|Du\|_{L^p}^{p-2}}$. $\left(\int |Du|^{p-2\cdot\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}}$.

对I_2: $Du\cdot D(|Du|^{p-2})$

$= \sum_{i=1}^n \partial_i u\cdot\partial_i(|Du|^{p-2})$

$= \sum_{i=1}^n \partial_i u\cdot\partial_i\left[\left(\sum_{j=1}^n(\partial_j u)^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\right]$

$= \sum_{i=1}^n \partial_i u\cdot\frac{p-2}{2}\cdot\sum_{j=1}^n 2(\partial_j u)(\partial_i\partial_j u)\cdot|Du|^{p-4}$.

$= (p-2)|Du|^{p-4}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(\partial_i u)(\partial_j u)(\partial_i\partial_j u)$

$= (p-2)|Du|^{p-4}\left[(\partial_1 u,\dots,\partial_n u)\begin{pmatrix}\partial_{11}u & \cdots & \partial_{1n}u\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_{n1}u & \cdots & \partial_{nn}u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_1 u\\ \vdots\\ \partial_n u\end{pmatrix}\right]$

$$= (p-2)\,|Du|^{p-4}\cdot(Du)^T(D^2u)\cdot(Du)$$

$$\leq (p-2)\,|Du|^{p-2}\,|D^2u|.$$

$\therefore\ |I_2| \leq C_p \int |Du|^{p-2}\,|D^2u|\,|u|\,dx$, 又化为$I_1$估计 计~~算~~

于是有: $\|Du\|_p^p \leq C\|Du\|_p^{p-2}\,\|D^2u\|_p\,\|u\|_p$ (1)得证.

(2). 类似(1)有:

$$\int |Du|^{2p}\,dx \leq C\int_U |u|\cdot|Du|^{2p-2}\,|D^2u|\,dx$$

$$\underset{\frac{1}{p}+\frac{2p-2}{2p}=1}{\overset{\text{Hölder}}{\leq}} C\left(\int_U |u|^p\cdot|D^2u|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_U |Du|^{2p-2\cdot\frac{2p}{2p-2}}\right)^{\frac{2p-2}{2p}}$$

$$= C\left(\int_U |Du|^{2p}\right)^{\frac{2p-2}{2p}}\left(\int_U |u|^p\cdot|D^2u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \left(\int_U |Du|^{2p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_U |u|^p\,|D^2u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\|u\|_\infty\,\|D^2u\|_p$$

开方即有(2)

□

11. 设U是连通开集. $u\in W^{1,p}(U)$. $Du=0$ a.e. in U. 证明: u a.e.= const in U.

Rmk: 不能用5.8节的Poincaré不等式. 因为11题是Poincaré不等式证明中的一步.

证明: 设$u^\varepsilon = u*\eta_\varepsilon$. 则 $\begin{cases} u^\varepsilon\in C^\infty(U_\varepsilon)\ \forall\varepsilon>0. \\ Du^\varepsilon = Du*\eta_\varepsilon = (Du)^\varepsilon.\end{cases}$

$\Rightarrow Du^\varepsilon = 0$ in U_ε. ~~(因U连通)~~

因U连通 $\therefore\ \forall\varepsilon>0$. $\exists$ const C_ε. $u^\varepsilon(x)=C_\varepsilon$ in U_ε.

因为 $u^\varepsilon\to u$ a.e. in U as $\varepsilon\to0^+$

则 a.e $x\in U$. 有 $u(x)=\lim_{\varepsilon\to0}u^\varepsilon(x)=\lim_{\varepsilon\to0}C_\varepsilon =: C.$

$\Rightarrow u(x) \overset{a.e.}{=} C$

□

Rmk: 两个a.e.同时去掉也对, 证明可以利用D为椭圆算子. $0\in C^\infty \Rightarrow u\in C^\infty \Rightarrow u$ const

Stein: 见Thm3.2.1 or Ch6.3节.

#

泛函：弱收敛、弱*收敛、紧算子.

Ref:

[1] 张恭庆，林源渠：泛函分析讲义(上册)，ch 2.5, 4.1.

[2] ~~Reed, B~~ Micheal Reed, Barry Simon：现代数学物理方法(第一卷) 泛函分析.

顺序：

实 Hahn-Banach 及其推论

$\Downarrow$

$X \hookrightarrow X^{**}$.

$\Downarrow$

可分 B^* 空间的对偶空间中，有界列必有弱*收敛子列.

$\Downarrow$

X^* 可分 $\Rightarrow$ X 可分.

$\Downarrow$

Pettis 引理

$\Downarrow$

(弱) Banach-Alaoglu 定理 及其应用

$\Downarrow$

紧算子.

弱收敛与紧系

X 是 B^* 空间. X^* 是 X 上全体有界线性泛函，称作 X 的对偶空间

弱收敛：$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$. $\forall f\in X^* \Leftrightarrow x_n \rightharpoonup x$

$(X^*, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

弱* 收敛：$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$. $\forall x\in X$. $\Leftrightarrow f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

X^{**} 是 X^* 的对偶

Prop：X 为 Banach 空间. $\forall x\in X$ 设 $\tilde{x}(\cdot)$ 是 X^* 上的 有界 线性泛函. $\tilde{x}(\lambda) = \lambda x$. $\forall \lambda \in X^*$

则 $J: x \mapsto \tilde{x}$ 是 $X \to X^{**}$ ~~的等距嵌入~~ 的一个~~子空间~~ 线性等距同构. 且映为 X^{**} 的一个子空间

证明：因为 $|\tilde{x}(\lambda)| = |\lambda(x)| \le \|\lambda\|_{X^*}\|x\|_X$

故 $\tilde{x}$ 是 X^* 上的有界线性泛函.

$\|\tilde{x}\|_{X^{**}} \le \|x\|_X$

由 Hahn-Banach 定理 ~~存在~~ (的推论②). 对给定 x. $\exists\ \lambda\in X^*$.

s.t. $\|\lambda\|_{X^*} = 1$. $\lambda(x) = \|x\|_X$.

$$\Rightarrow \|\tilde{x}\|_{X^{**}} \overset{\text{定义}}{=} \sup_{\substack{\lambda\in X^* \\ \|\lambda\|\le 1}} |\tilde{x}(\lambda)| \ge \underset{\lambda(x)}{\underset{\|}{\|x\|_X}}.$$

$$\Rightarrow \|\tilde{x}\|_{X^{**}} = \|x\|_X.$$

□

实 Hahn-Banach 及其推论：

设 X 为实向量空间，p 为 X 上的实值函数. 且 $\forall \alpha\in[0,1]$ $p(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y)$. $\forall x, y$.

λ 是 X 的子空间 Y 上的线性泛函. $\lambda(x)\le p(x)$ on Y.

则 $\exists$ X 上的线性泛函 Λ. $\begin{cases} \Lambda(x)\le p(x). & \forall x\in X. \\ \Lambda(x) = \lambda(x) & \text{on } Y \end{cases}$

\#.

~~于是取 ① $p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|x\|$.~~

① 若 X 是 B^* 空间. Y 为 X 子空间 $\lambda\in Y^*$. 则 $\begin{cases}\exists\ \Lambda\in X^* \text{ 成为 } \lambda \text{ 的延拓}. \\ \|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*}\end{cases}$

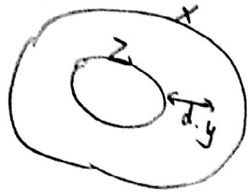
pf：取 $p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|x\|$ 即可.

② X 为 B^* 空间. $y\in X$. 则 $\exists$ 非零元 $\Lambda\in X^*$. $\Lambda(y) = \|\Lambda\|_{X^*}\|y\|$.

证：~~Y为子空间~~. 设 $Y\subseteq X$. $Y = \{ay \mid a\in\mathbb{R}\}$. 令 $\lambda(ay) = a\|y\|$.

由 ①. $\exists\Lambda$. $\|\Lambda\| = \|\lambda\|$. 将 λ 延拓到 X^* 上. 但 $\Lambda(y) = \|y\|$，$\|\Lambda\| = 1$ $\Rightarrow \Lambda(y) = \|\Lambda\|_{X^*}\|y\|$

③ 设 Z 为 B空间 X 的线性子空间. 设 $y\in X$. 使 $\operatorname{dist}(y, Z)=d$.



则 $\exists \Lambda\in X^*$. s.t. $\|\Lambda\|\le 1$

$$\Lambda(y)=d$$

$$\Lambda(z)=0 \quad \forall z\in Z$$

Proof: 设 $Z_0=\{x=x'+\alpha y \mid x'\in Z, \alpha\in\mathbb{R}\}$

$\forall x\in Z_0$. 令 $\lambda_0(x)=\alpha d$.

则 $\lambda_0\big|_{Z}=0$

$\lambda_0(y)=d$.

由 $x=\alpha y+x'$

则 $|\lambda_0(x)|=|\alpha|\, d=|\alpha|\operatorname{dist}(y, \underset{\ni x'/\alpha}{Z})$.

$\le|\alpha|\cdot\left\|\frac{x'}{\alpha}+y\right\|$.

$=\|x'+\alpha y\|=\|x\|$. $\quad\therefore \|\lambda_0\|\le 1$.

由 Hahn-Banach 定理

保范延拓为 $\lambda\in X^*$. , 又因 $\lambda(y)=d$ 知 $\|\Lambda\|=1$.

□

有了①→③ 我们证明如下定理

Thm1: X是Banach空间. 则 X^* 可分 $\Rightarrow$ X可分.

证: 设 $\{\lambda_n\}$ 为 X^* 的可列稠子集.

问: 如何找 X 的可数稠子集?

选取 $x_n\in X$ $\|x_n\|=1$ s.t. $|\lambda_n(x_n)|\ge\frac{\|\lambda_n\|}{2}$.

设 $D=\left\{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid n\in\mathbb{Z}_+, r_i\in\mathbb{Q}\right\}$ 可列. 下证 D 在 X 中稠密

反证: 则 $\exists y\in X\setminus\bar{D}$. 及 $\lambda\in X^*$ s.t. $\lambda(y)\ne 0$ 但 $\lambda(x)=0$ $\forall x\in\bar{D}$ ←这由③得出

设 $\{\lambda_{n_k}\}$ 为 $\{\lambda_n\}$ 中收敛于 λ 的子列.

则 $\|\lambda-\lambda_{n_k}\|_{X^*}\ge\left|\underbrace{(\lambda-\lambda_{n_k})(x_{n_k})}_{\lambda(x_{n_k})=0}\right|=|\lambda_{n_k}(x_{n_k})|\ge\frac{\|\lambda_{n_k}\|}{2}$

$\Rightarrow \|\lambda_{n_k}\|\to 0$ as $k\to\infty$ $\Rightarrow \lambda=0$. 矛盾

□

Thm 1 中用到了一个事实.

lem: 若 X 是可分 B^* 空间 则 X^* 上任何有界序列有弱*收敛子列.

pf: X 可分 $\Rightarrow$ X 有可数稠子集 $\{x_n\}$

$\{f_n\}$ 有界. 故 $\forall$ fixed m. $\{ f_n(x_m) \mid n, m \in \mathbb{N} \}$ 有界.

由于有界数列 有收敛子列.

对角线法则 $\Rightarrow$ ~~$\forall m \in \mathbb{N}$~~ $\exists$ 子列 $\{f_{n_k}\}$ s.t. $\forall m \in \mathbb{Z}_+$

$\{f_{n_k}(x_m)\}_{k=1}^{\infty}$ 是收敛数列.

又 $\{x_m\} \overset{\text{dense}}{\subset} X$

$\{f_n\}$ bdd

$\Rightarrow$ $\forall x \in X$. $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ 是收敛数列

(柯西列 + 插项).

令 泛函 $F(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$.

则 F linear.

$|F(x)| \leq \sup_n \|f_n\| \|x\|$. $\therefore \exists f \in X^*$ s.t.

$\langle f, x\rangle = F(x) = \lim_{k\to\infty} \langle f_{n_k}, x\rangle$. $\Leftrightarrow$ $f_{n_k} \xrightarrow{*} f$. □

Thm 2 ~~Pettis引理~~ Pettis 引理.

自反空间X的闭子空间 X_0 必自反.

证明: 这样做. $\forall z_0 \in X_0^{**}$. 要证 $z_0 \in X_0$.

i.e. $\exists x \in X_0$. s.t. $\forall f_0 \in X_0^*$. $\langle z_0, f_0\rangle = \langle f_0, x\rangle$.

here $=$ means we can identify $z_0 \in X^{**}$ with $x \in X$.

① 先在X上做到此事

$\forall f \in X^*$. 设 $T: X^* \to X_0^*$

$f \mapsto f|_{X_0} = f_0$. 由 $\|f_0\| \leq \|f\|$.

$\therefore T: X^* \to X_0^*$ 有界. 所以. 由T诱导了~~其对偶~~ $T^*: X_0^{**} \to X^{**}$.

$z_0 \in X_0^{**} \longmapsto T^* z_0 \in X^{**}$

由X自反 $\therefore \exists x \in X$.

s.t. $\langle T^* z_0, f\rangle = \langle f, x\rangle$ $\forall f \in X^*$.

② 再证明 $\begin{cases} x \in X_0. \\ \text{该式限制在 } X_0, X_0^{*}, X_0^{**} \text{ 也对. 即 } \langle z_0, f_0\rangle = \langle f_0, x\rangle \end{cases}$

(2.1) 反设 $x\notin X_0$ 由Hahn-Banach 推论③.

$\exists f\in X^*$, $f|_{X_0}\equiv 0$

$\langle f, x\rangle = 1$ 　 于是 $Tf = f|_{X_0} = 0$.

$\Rightarrow$

$\langle \xi_0, \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{Tf}\rangle = \langle T^*\xi_0, f\rangle = \langle f, x\rangle = 1$. 矛盾!

$\Rightarrow x\in X_0$

(即. 如果 $x\notin X_0$. 则能找到一个在 X_0上 vanishing 的泛函.
但我们要证的式子要求"不能 vanishing").

(2.2). ~~$\forall f \in$~~ 证明 $\langle \xi_0, f_0\rangle = \langle f, x\rangle$ 　 $\forall f_0\in X_0^*$

由于T满 故 $\forall f_0\in X_0^*$. $\exists f\in X^*$ s.t. $f_0 = Tf$.

$\therefore \langle \xi_0, f_0\rangle = \langle \xi_0, Tf\rangle = \langle T^*\xi_0, f\rangle = \langle \xi, f\rangle$

$= \langle f, x\rangle$

$= \langle f_0, x\rangle$ 　 $\forall x\in X_0$.

□

最后证明本课程最常用(in Ch 7)的一个定理.

Thm 3 (弱 Banach-Alaoglu 定理)

自反空间单位闭球弱(自)列紧.

证明: 用人话说, 即证明: 自反空间 X 中, 任何有界序列 $\{x_n\}$ 有弱收敛子列
若 $\{x_n\}$ 闭. 则 弱 极限也在 X 中.

$\Leftrightarrow$ $\forall \{x_n\}$ 有界. in X, $\exists$ 子列 $\{x_{n_k}\}$. s.t. $\forall f\in X^*$ 　 $\langle f, x_{n_k}\rangle \to \langle f, x\rangle$
as $k\to+\infty$.

如何证明? steps
① 将 $x\in X$ 看成 X^{**} 中的元素, $\{x_n\}$ 在 X^{**} 有界
→ 存在弱* 收敛子列
② 再由 Pettis 引理证明中的叙述, 设法把这些 X^{**} 中的元素放回 X 中
③ 若球闭. 则自列紧.

证: ① 令 $X_0 = \overline{\text{span}\{x_n\}}$

X 自反 $\Rightarrow$ X_0 自反 $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ $X_0 \subset X_0^{**}$.

X_0 可分 $\Rightarrow$ X_0^{**} 可分 $\Rightarrow$ X_0^* 可分

将 $\{x_n\}$ identify 为 X_0^{**} 中的元素 $\{\xi_n\}$.

则 $\{\|\xi_n\|_{X^{**}}\} < \infty$. $\langle \xi_n, f\rangle = \langle f, x_n\rangle$ $\forall f \in X_0^*$.

类似于 Lem 的证明知, $\exists \{\xi_n\}$ 的子列 $\{\xi_{n_k}\}$ s.t.

$\xi_{n_k} \xrightarrow[\exists]{*} \xi$. in $(X_0^*)^*$.

即 $\forall f \in X_0^*$. $\langle \xi_{n_k}, f\rangle \longrightarrow \langle \xi, f\rangle$ ✓.

② 又因 X_0 自反 $\therefore \exists x_0 \in X_0$ s.t.

$\langle \xi, f\rangle = \langle f, x_0\rangle$, $\forall f \in X_0^*$.

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \langle f, x_{n_k}\rangle = \lim\limits_{k\to\infty} \langle \xi_{n_k}, f\rangle = \langle f, x_0\rangle$. $\forall f \in X_0^*$. ✓

③. 如何: 将 $f \in X_0^* \longrightarrow \tilde{f} \in X^*$.

$\forall \tilde{f} \in X^*$: 设 $f = \tilde{f}$ 为 $\tilde{f}$ 在 X_0 上的限制.

则 $\lim\limits_{k\to\infty} \langle \tilde{f}, x_{n_k}\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ x_{n_k} \in X_0}}{=} \lim\limits_{k\to\infty} \langle f, x_{n_k}\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ ②}}{=} \langle f, x_0\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ x_0 \in X_0}}{=} \langle \tilde{f}, x_0\rangle$.

$\therefore x_{n_k} \rightharpoonup x_0$. 从而 X 中任何有界集弱列紧.

④ 若是闭球: 设 $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$.

$\|x_n\| \le 1$.

由 H-B 推论②, $\exists f \in X^*$ s.t. $f(x_0) = \|x_0\|$, $\|f\| = 1$. 只用证 $\|x_0\| \le 1$.

而 $\|x_0\| = f(x_0) = \left|\lim\limits_{k\to\infty} \langle f, x_{n_k}\rangle\right| \le \|f\| \sup\limits_k \|x_{n_k}\|$

≤ 1.

$\Rightarrow x_0 \in$ 单位闭球. $\Rightarrow$ 自列紧.

□

怎么用弱Banach-Alaoglu定理?

抛物方程.

$$
(*)\begin{cases} u_t + Lu = f & \text{in } U_T = U\times(0,T] \\ u = 0 & \text{on } \partial U\times[0,T] \\ u = g & \text{on } U\times\{t=0\} \end{cases}
$$

$$Lu = -\sum a^{ij}\partial_i\partial_j u + \sum b^i \partial_i u + cu.$$

一般, 设 $g\in L^2(U)$. $f\in L^2(U_T)$.

$a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U_T)$

~~如何找子~~

弱解定义? 分布意义下的解.

称 $u\in L^2(0,T;H_0^1(U))$, $u'\in L^2(0,T;H^{-1}(U))$ 为(*)的弱解.

是指 ① $\langle u',\varphi\rangle + B[u,\varphi;t] = \langle f,\varphi\rangle$. $\forall\varphi\in C_c^\infty(U)$.
(or $\varphi\in H_0^1(U)$).

② $u(0)=g$

$$B[u,\varphi;t] = \int_U \sum a^{ij}\partial_i u\,\partial_j\varphi + \sum b^i\partial_i u\cdot\varphi + cu\varphi\, dx.$$

方法: 如何找到弱解?

Step 1: Galerkin 截断. 造逼近解.

H_0^1. L^2: Hilbert 空间. ∃ 标正基 $\{w_k\}$.

从而 $u = \cancel{\sum_m d_m(t)}\ \sum_{k=1}^\infty d^k(t) w_k$.

只截断前m项 $u_m = \sum_1^m d_m^k(t) w_k$.

⇒化成无穷个ODE. ODE解∃! ⇒ u_m的确存在

Step 2: $\{u_m\}$ ~~一致有界~~ 在某个 Banach 空间一致有界

从而有弱极限(子列) $u_{m_k} \rightharpoonup u$.

Step 3: 证明 u 是弱解. 即满足①②.

□

泛函习题:

1. 自反Banach空间中, 有界 $\Leftrightarrow$ 弱列紧

Proof: $\Rightarrow$ 弱 Banach-Alaoglu.

$\Leftarrow$. 反证, 若 $\{x_n\}$ 弱列紧, 但 $\|x_n\|$ 无界.

则 $\exists$ 子列 x_{n_k} s.t. $\|x_{n_k}\| > k$.

x_{n_k} 弱列紧 $\Rightarrow \exists\ x_{n_{k_j}}$ 弱收敛 in X.

收敛数列必有界.

$\Rightarrow \forall f \in X^*$, $\langle f, x_{n_{k_j}} \rangle$ 收敛, as $j \to +\infty$ $\Rightarrow \sup\limits_{f \in X^*} |\langle f, x_{n_{k_j}} \rangle| < +\infty$.

由共鸣定理 x_{n_k} 有界 与 $\|x_{n_k}\| > k$ 矛盾!

$\square$

2. $x_n \rightharpoonup x_0 \Rightarrow \|x_0\| \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$

Proof: $x_n \rightharpoonup x_0 \Rightarrow \forall f \in X^*\ \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x_0 \rangle$.

设 $\iota: X \hookrightarrow X^{**}$ 为等距嵌入.

$\lim\limits_{n\to\infty} \langle f, x_n \rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle \iota x_n, f \rangle$. 由引理

$\langle \iota_{x_0}, f \rangle = \langle f, x_0 \rangle$ 上式右边 $\le \liminf\limits_{n\to\infty} \|\iota x_n\| \cdot \|f\|$.

$\Rightarrow \|\iota_{x_0}\| \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|\iota x_n\| = \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.

$\|\iota_{x_0}\| = \|x_0\|$.

$\square$

共鸣定理： X、Y Banach. $W\subseteq \mathcal{L}(X,Y)$

若 $\sup\limits_{T\in W}\|Tx\|<\infty \quad \forall x\in X$

则 $\exists M.\ \|T\|\le M \quad \forall T\in W$

Banach-Steinhaus 定理.

X、Y Banach. $M \overset{\text{dense}}{\subset} X$. $T_n, T\in\mathcal{L}(X,Y)$.

则 T_n 强收敛于 T. $\Leftrightarrow$ (1) $\|T_n\|$ 有界

i.e. $\forall x\in X$. (2) $\forall x\in M$, $Tx_n\to Tx$

$T_n x\to Tx$.

lem: X, Y Banach. $A_n\in\mathcal{L}(X,Y)$.

又 $\forall x\in X$. $\{A_n x\}$ 在 Y 中收敛. 则 $\exists A\in\mathcal{L}(X,Y)$. s.t.

A_n 强收敛到 A 且 $\|A\|\le \liminf\limits_{n\to\infty}\|A_n\|$.

Proof: $\forall x\in X$, 由 $A_n x$ 在 Y 中收敛.

故 可以定义. $Ax=\lim\limits_{n\to\infty}A_n x$

由 $\sup\limits_n \|A_n x\|<+\infty$.

故. 由共鸣 Thm, $\exists M>0$ s.t. $\|A_n\|\le M$. $\forall n\ge 1$.

$\Rightarrow \|Ax\|=\liminf\limits_{n\to\infty}\|A_n x\|$

$\le \liminf\limits_{n\to\infty}\|A_n\|\cdot\|x\|\le M\|x\|$.

□

紧算子(暂不涉及谱理论)

设 X, Y Banach. $T: X\to Y$ 是线性的

Def: (紧算子). 称 $T: X\to Y$ 是紧算子, 若对X中任何有界集B, T(B)在Y中列紧. 即 对任何X中有界序列$\{x_n\}$. $\{Tx_n\}$ 在Y中有收敛子列.

Prop: 紧算子必有界. (trivial).

~~Thm:~~

Def (全连续). 称 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ 全连续. 若 $x_n \rightharpoonup x$ in X implies $Tx_n\to Tx$ in Y.

Thm: 设T为$X\to Y$的紧算子. 则T全连续.

若还有X自反. 则 T全连续 $\Rightarrow$ T紧.

Proof: 设T紧. 1° 设$\{x_n\}$在X中有 $x_n\rightharpoonup x$

只证: $Tx_n\to Tx=:y$ in Y.

反证: 若不然, 则 $\exists\,\varepsilon_0>0$ 子列 $\{n_k\}$, s.t. $\|Tx_{n_k}-y\|\geq\varepsilon_0$

由 $x_n\rightharpoonup x$. 则 $\|x_n\|$ 有界. (Banach-Steinhaus Thm推论)

又T紧 $\therefore\ \exists$子列 $x_{n_{k_j}}$ s.t. $Tx_{n_{k_j}}\to z\in Y$.

但 $\forall y^*\in Y^*$ $\langle y^*, Tx_{n_{k_j}}-y\rangle$

$$=\langle \underbrace{T^*y^*}_{\in X^*}, \underbrace{x_{n_{k_j}}-x}_{\in X}\rangle \to 0 \qquad x_{n_{k_j}}\rightharpoonup x.$$

$\Rightarrow Tx_{n_{k_j}}\rightharpoonup y$ in Y.

$\Rightarrow y=z$. $\qquad\Rightarrow Tx_{n_{k_j}}\to y$ in Y

与 $\|Tx_{n_{k_j}}-y\|\geq\varepsilon_0$ 矛盾!

\#

想法: 反证

Tx_{n_j} 有强极限吗

希望强极限是y. 只需证y是弱极限

应用：Sobolev 紧嵌入.

常用的：$H_0^1(U) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(U) \hookrightarrow H^{-1}(U)$，

$\uparrow$ 紧嵌入. $\uparrow$ $H_0^1(U)$的对偶.

（则 $H_0^1 \hookrightarrow\hookrightarrow H^{-1}$）.

因为：$A: X \to Y$ 有界 B: ~~有界~~ $Y \to Z$ 有界 A、B 有一个紧 则 $B\circ A$ 紧.

#.

习题 4.1.11：X, Y, Z Banach，$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$

则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 常数 $C(\varepsilon) > 0$，s.t. $\|x\|_Y \le \varepsilon \|x\|_X + C(\varepsilon)\|x\|_Z$.

Proof：$\forall x \in X$，令 $v = \frac{x}{\|x\|_X}$. $\|v\|_X = 1$.

则要证，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists C(\varepsilon) > 0$，$\|v\|_Y \le \varepsilon + C(\varepsilon)\|v\|_Z$. $\forall v \in B_X(0,1)$.

若不然 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$ ~~s.t.~~ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$. $\exists v_n \in B_X(0,1)$.

s.t. $\|v_n\|_Y > \varepsilon_0 + n\|v_n\|_Z$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|v_n\|_Y > \varepsilon_0 \\ \|v_n\|_Z < \frac{1}{n}\|v_n\|_Y \end{cases}$$

由 $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$. $\therefore \exists M > 0$，$\|v_n\|_Y \le M\|v_n\|_X$

$\Rightarrow \|v_n\|_Z < \frac{M}{n}\|v_n\|_X = \frac{M}{n} \to 0$.

$\Rightarrow v_n \to 0$ in Z.

但 $\|v_n\|_X = 1$. $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$. 有 $\exists v_{n_k} \to v$ in Y.

$Y \hookrightarrow Z$，故 $v_{n_k} \to v$ in Z

~~$\Rightarrow v = 0$. 与 $\|v\|_X = 1$ 矛盾!~~

$\Rightarrow v = 0$. $\Rightarrow \|v\|_Y = 0$

与 $\|v_n\|_Z \ge \underset{>0}{\varepsilon_0}$ 矛盾！

□.

Aubin-Lions 紧性定理（L^p 版本）

$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$. 可分，自反 Banach.

$T>0$. 且 $\exists \{u_n^{(x,t)}\}_{n\geq 1}$ s.t. $\{u_n\}$ 在 $L^p(0,T;X)$ 中有界 $\quad 1<p<\infty$

$\{\partial_t u_n\}$ 在 $L^q(0,T;Z)$ 有界.

则 u_n 在 $L^p(0,T;Y)$ 中列紧.

应用：取 $p=q=2$. $X=H_0^1$. $Z=H^{-1}$. $Y=L^2$.

在 Ch7 中. 也会用到

$\{u_n\}$ $L^2(0,T;H_0^1)$ 有界 即 $\sup_n \int_0^T \|u_n(t)\|_{H_0^1}^2 <+\infty$

$\{\partial_t u_n\}$ $L^2(0,T;H^{-1})$ 有界.

则 ~~存在~~ u_n 在 $L^2(0,T;L^2)$ 中存在收敛子列.

u_n: 抛物方程的逼近解.

$L^2(0,T;L^2)$ 中子列的极限，就是最后要找的解！

对非线性(抛物)方程，这样的方法也是可以奏效的.

例如. Navier-Stokes 方程. Euler 方程

in $\mathbb{R}^d$ $(d=2,3)$. 取 $p=q=2$ or $p=2$. $q=\frac{4}{3}$

. Euler 方程 ~~强解~~ 强解局部存在性 ~~整体存在性~~.

$$\partial_t u + \mathbb{P}(u\cdot\nabla u)=0.$$

$$u|_{t=0}=u_0 \in L^2_\sigma \cap H^s. \quad s>\frac{d}{2}+1. \Rightarrow u\in C([0,T_0];H_\sigma^s) \cap C^1([0,T_0];H_\sigma^{s-1})$$

套路：光滑化. ⇒ 光滑化方程解 $\exists$ ⇒ 证明一致有界 (Aubin-Lions 条件)

⇒ 用 Aubin-Lions 造出最终的解.

. 2D. 3D Navier-Stokes 方程 in Leray-Hopf 弱解也类似于此.

具体. Ref: Majda, Bertozzi; Vorticity & Incompressible Flow.

或 Galerkin 截断造出逼近解.