# 2017年春季学期 微分方程II课后作业6

Deadline: 2017.5.23

本次作业中，我们约定$U$是$\mathbb{R}^n$中的边界光滑的有界开集. 各个**PDE**中, 我们假设系数均属光滑函数, $L$满足一致椭圆条件.$\nu$是$\partial U$的单位外法向量.

第十二周

**Hint:** 如果实在不会做可以尽可能多地写出自己的思路和计算。如果你是抄了网上的答案或者同学的作业，那么你最好**check**一下其中的计算细节和跳过的**gap**，不然这作业和没写有何区别呢？如果你是按**Hint**做的，那没必要抄一遍**Hint**，把**Hint**中跳过的细节补全，写成一个完整的证明即可。

1. 补充题: 设$U$设边界光滑的有界连通开集, $a^{ij}, c \in C^\infty(\bar{U})$.

$$Lu := \sum_{i,j} \partial_j(a^{ij}\partial_i u) + c(x)u.$$

请讨论关于$L$的(零边值)的特征值问题和主特征值问题.

2. (Evans Ch.6 Ex.14) 设$\lambda_1$是如下非对称的一致椭圆算子(零边值条件)的主特征值

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u + cu.$$

请证明如下极大极小刻画:

$$\lambda_1 = \sup_{u \in C^\infty(\bar{U}), u>0 \ \ in \ U, u=0 \ \ on \ \partial U} \ \inf_{x \in U} \frac{Lu(x)}{u(x)}.$$

Hint: 课本上提示“考虑伴随算子$L^*$关于特征值$\lambda_1$的特征函数$w_1^*$.”具体地, 你可以尝试按如下方法解题(不保证正确性). 首先回顾课本364页定理6.5.3(非对称椭圆算子的主特征值定理)如下:

(1)存在$L$的实特征值$\lambda_1$(零边值条件下), 使得只要$\lambda \in \mathbb{C}$是另一个特征值, 就必然有$Re(\lambda) \geq \lambda_1$;

(2)存在对应的特征函数$w_1$, 它是$U$中的正实值函数;

(3)$\lambda_1$是单重特征值, 即零边值特征值问题$Lu = \lambda_1 u$的解必然是$w_1$的常数倍.

回到原题, 先令$X = \{u \in C^\infty(\bar{U}) : u > 0 \ \ in \, U, u = 0 \ \ on \ \partial U\}$. 根据定理6.5.3, 假设$H^1(U)$函数$w_1 > 0$是$\lambda_1$对应的特征函数. 然后你可以取一列$X$中的函数$\{u_n\}$在$H^1(U)$中逼近$w_1$. 这样的话, 就有$\sup_X \inf_x \frac{Lu}{u} \geq \inf_x \frac{Lu_n}{u_n} = \lambda_1$. 于是我们还需要证明反向的不等式. 为此, 你任取一个$u \in X$, 你要证明的是$\inf_{x \in U} \frac{Lu}{u} \leq \lambda$一定成立, 这等价于$\inf_x(Lu - \lambda_1 u) \leq 0$. 所以你需要构造出$Lu - \lambda_1 u$. 为此, 我们考虑$L^* w_1^* = \lambda_1 w_1^*$, 其中$w_1^* > 0$是$L^*$关于$\lambda_1$的正值特征函数(为何$\lambda_1$也是$L^*$的特征值?) 这个方程等价于$(L^* w_1^*, u) = (\lambda_1 w_1^*, u)$, 再利用$L^*$的定义去得出$(Lu - \lambda_1 u, w_1^*) = 0$. 至此，剩下的步骤是显然的. **另外，这道题不要去mathstackexchange上抄答案，那个答案是错的。**

3. (Evans Ch.6 Ex.15) (Hadamard变分公式)考虑一族单参数的(边界)光滑、光滑依赖参数的有界**域(连通开集)**$U(\tau) \subseteq \mathbb{R}^n$. 设随着$\tau$变化, $\partial U(\tau)$上每一点的移动速度为$\tilde{\mathbf{v}}$. 对任一个$\tau$, 我们考虑特征值问题如下:

$$\begin{cases} -\Delta w(x,\tau) = \lambda(\tau) w(x,\tau) \ \ in \ U(\tau) \\ \qquad w = 0 \ \ \ on \ \partial U(\tau) \end{cases} \tag{1}$$

其中$\|w\|_{L^2(U(\tau))}=1$. 设$\lambda, w$是关于$\tau, x$的光滑函数. 证明:

$$\dot{\lambda}=-\int_{\partial U(\tau)}\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 \tilde{\mathbf{v}}\cdot \nu dS.$$

其中 $\dot{}=\frac{d}{d\tau}$, $\tilde{\mathbf{v}}\cdot\nu$是$\partial U(\tau)$的法向移动速度.

Hint: 此题中，你可以**不加证明地使用**如下公式: 设$f(x,\tau)$是光滑函数, 那么

$$\frac{d}{d\tau}\int_{U(\tau)} f dx=\int_{\partial U(\tau)} f\tilde{\mathbf{v}}\cdot\nu dS+\int_{U(\tau)}\partial_\tau f dx.$$

现在回到原题, 对方程$-\Delta w=\lambda w$两边与$w$内积, 右边等于

$$\lambda\int_{U(\tau)} w^2 dx.$$

左边用一次分部积分之后算出来等于

$$\int_{U(\tau)}|\nabla w|^2 dx-\int_{\partial U(\tau)} w\cdot\frac{\partial w}{\partial\nu}dS.$$

于是根据题设你就能得出

$$\lambda=\int_{U(\tau)}|\nabla w|^2 dx.$$

该式两边对$\tau$求导, 利用上面的公式可得

$$\dot{\lambda}=\int_{\partial U(\tau)}|\nabla w|^2\tilde{\mathbf{v}}\cdot\nu dS+\int_{U(\tau)}\partial_\tau|\nabla w|^2 dx.$$

这个式子的第二项用一次分部积分, 经计算可化作

$$2\dot{\lambda}\int_{U(\tau)} w^2 dx+\lambda\int_{U(\tau)}\partial_\tau(w^2)dx.$$

再用一次公式, 直接计算得到结果等于$2\dot{\lambda}$. 余下的过程均是显然的.

## 第十三周

1. (补充题)设$U$是有界连通开集, $U_T:=U\times[0,T]$. 证明$C(\bar{U_T})=C([0,T];C(\bar{U}))$.
2. (Evans Ch.7 Ex.1) 证明下述热方程至多只有一个光滑解:

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u=f \ \ in\ U_T,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0 \ \ on\ \partial U\times[0,T],\\ u=g \ \ on\ U\times\{t=0\}.\end{cases}$$

Hint: 设$u_1,u_2$是解, 令$v=u_1-u_2, E(t):=\int_U v(x,t)^2dx$, 去证明$E'(t)\le 0$.

3. (Evans Ch.7 Ex.2) 设$u$是下述热方程的光滑解:

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u=0 \ \ in\ U\times\mathbb{R}_+,\\ u=0 \ \ on\ \partial U\times[0,\infty),\\ u=g \ \ on\ U\times\{t=0\}.\end{cases}$$

证明:

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2}\le e^{-\lambda_1 t}\|g\|_{L^2},$$

其中$\lambda_1$是$-\Delta$(零边值问题)的主特征值.

方法1: 利用$\lambda_1=\inf_{\|u\|\in H_0^1,u\neq 0}\frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^2}$, 然后导出$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2\le-\lambda_1\|u(t)\|_{L^2}^2$, 再用Gronwall不等式。

方法2: 你可以将$-\Delta$的特征值$\{\lambda_k\}$对应的特征向量$\{\phi_k\}$全体作为$L^2$的标准正交基，$u$展开为$\sum_k d_k\phi_k$, 再证明$d_k = (g,\phi_k)e^{-\lambda_k t}$，剩下的过程直接硬算就行。

**下面的题目注意：**课本上的$\langle\cdot,\cdot\rangle$严格来说不是内积，而是泛函分析中某个Banach空间的对偶空间的元素在原空间的元素上的"作用"。

4. (Evans Ch.7 Ex.5)设

$$u_k \rightharpoonup u \; in \; L^2(0,T;H_0^1(U)),\;\; u_k' \rightharpoonup v \; in \; L^2(0,T;H^{-1}(U)).$$

证明:$u' = v$.

Hint: 去证明书上的Hint即可，即对任意$\phi \in C_c^1(0,T), w \in H_0^1(U)$, 都有

$$\int_0^T \langle u_k', \phi w\rangle dt = -\int_0^T \langle u_k, \phi' w\rangle dt.$$

5. (补充题)验证课本7.1节, 379页(30)式推到(31)的详细过程. 具体来, 已知的是

$$\forall \mathbf{v} \in L^2(0,T;H_0^1(U)), \int_0^T \langle \mathbf{u}', \mathbf{v}\rangle + B[\mathbf{u},\mathbf{v};t] = \int_0^T (\mathbf{f},\mathbf{v})dt.$$

要证明对任意$w \in H_0^1(U), a.e.\ t \in [0,T]$, 成立

$$\langle \mathbf{u}', w\rangle + B[\mathbf{u}, w; t] = (\mathbf{f}, w).$$

Hint: 把已知条件中的$\mathbf{v}$取成$\eta w, \eta \in C_c^\infty[0,T], w \in H_0^1(U)$. 再注意到实分析中的结论：若局部可积函数$f$满足对任意紧支集光滑函数$\eta$都有$\int f\eta = 0$, 那么$f = 0$ a.e.成立.

## 第十四周

1. (Evans Ch.7 Ex.6) 设$H$是Hilbert空间，$\mathbf{u}_k \rightharpoonup \mathbf{u} \; in \; L^2(0,T;H)$. 再设$\text{ess sup}_{0\le t\le T}\|\mathbf{u}_k(t)\|_H \le C$. 证明:$\text{ess sup}_{0\le t\le T}\|\mathbf{u}(t)\|_H \le C$.

Hint: 用Lebesgue微分定理证明，对$a, b \in [0,T], v \in H$, 成立$\int_a^b (v, \mathbf{u}_k(t))dt \le C\|v\||b-a|$即可.

2. (Evans Ch.7 Ex.7) 设$u$是下述方程的光滑解:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + cu = 0 \;\; in \; U \times \mathbb{R}_+, \\ \qquad\qquad\qquad\; u = 0 \;\; on \; \partial U \times [0,\infty), \\ \qquad\qquad\qquad\; u = g \;\; on \; U \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

函数$c \ge \gamma > 0, \gamma$是个正常数。证明: $|u(x,t)| \le Ce^{-\gamma t},\;\; \forall (x,t) \in U_T$.

Hint: 令$v(x,t) = e^{\gamma t}u(x,t)$, 导出$v$满足的初边值问题的方程，再用弱极大值原理即可。

3. (Evans Ch.7 Ex.8) 设$u$是上一题方程的光滑解, 其中$g \ge 0, c$有界(但不一定非负), 证明:$u \ge 0$.

Hint: 设$v = e^{-\lambda t}u$, 先算出$v$满足的方程, 在考虑$\lambda$如何取定。

4. (Evans Ch.7 Ex.9, 选做) 证明7.1.3中的(54)式成立，具体要求如下:

设$u \in C^\infty(U)$, $u|_{\partial U} = \Delta u|_{\partial U} = 0$, 证明存在$\beta > 0, \gamma \ge 0$, 使得

$$\beta\|u\|_{H^2}^2 \le (Lu, -\Delta u) + \gamma\|u\|_{L^2}^2.$$

**Hint:这道题难，你可以参考文献:**

Haïm Brezis, Lawrence Craig Evans: *A variational Inequality Approach to the Bellman-Dirichlet Equation for Two Elliptic Operators*, Archive for Rational Mechanics of Analysis, 1979, 1-13.

一种简单的情况是，考虑$Lu = \sum_{i,j}\partial_j(a^{ij}\partial_i u)$. 先将不等式右边第一项化简，去说明只要证明

$$I := \sum_{i,j,k}\int_{\partial U} a^{ij}\partial_i u \partial_j u \cos(\nu, e_k) dS \; satisfies \; |I| \lesssim \int_{\partial U} |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 dS.$$

若能证此, 那么用迹定理和带$\epsilon$的柯西不等式即可。为了得到上面的估计，你需要先进行边界拉直（联想带边流形的定义），据单位分解知，你只需要在边界上某点的一个小邻域内证明结论。边界拉直后，在新的坐标系下，设外法向为$e_n$(或者说，就是局部坐标下)，令$v = \partial_n u$. 想办法依次把$\partial_n^2 u, \partial_\alpha \partial_n u, \partial_{\alpha\beta} u$用$v, \partial_\alpha v$表示, 这样的话$I$可以表示为

$$I = \int_\Sigma v(g^\alpha \partial_\alpha v + hv) d\mathcal{H}^{n-1}.$$

其中$\Sigma$是小邻域与边界的交集在坐标映射下的像($\mathbb{R}^{n-1}$中的子集). 拆括号、分部积分之后即可得到结论.