2017年春季学期 微分方程II课后作业5

Deadline: 2017.5.2

本次作业中，我们约定U是$\mathbb{R}^n$中的边界光滑的有界开集. 各个PDE中，我们假设系数均属光滑函数，L满足一致椭圆条件.ν是∂U的单位外法向量.

期中考试之后，两位助教会核对前四次交作业的名单。请没有交作业的同学在五一节之后尽快补交作业，不要拖到期末考试之前。

第九周

1. (Evans Chapter 6 Ex.6) 设U是有界连通开集, ∂U由两个不交的闭集Γ_1, Γ_2构成. 对如下带有Dirichlet-Neumann边界条件的Poisson方程, 请定义何为该方程的弱解, 并讨论存在性、唯一性.

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad in\, U \\ u = 0 \quad on\, \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad on\, \Gamma_2. \end{cases} \tag{1}$$

2. (Evans Chapter 6 Ex.7, 有改动) 设$u \in H^1(\mathbb{R}^n)$具有紧支集, 并且是半线性方程

$$-\Delta u + c(u) = f \;\; in\, \mathbb{R}^n$$

的弱解. 其中$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是光滑函数, $c(0) = 0, c' \geq 0$. 并且$c(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 证明:存在常数$C > 0$, 使得$\|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

(Hint: 仿照内部正则性定理的证明即可. 注意到在取测试函数v时, 不要再插入光滑截断函数ζ(为什么?). 为估计D^2u, 你首先要估计的是差商$DD_h^k u$, 再用差商的性质得到D^2u的估计. 证明过程中, 先把$c(u)$挪到等号右边, 令$\tilde{f} = f - c(u)$, 化为考虑$-\Delta u = \tilde{f}$的弱解. 而后定义对应的双线性型. 在估计$(\tilde{f}, v)_{L^2}$时, 你可能会用到差商的"形式分部积分"和Lagrange中值定理.)

第十周

1. 课本6.3节证明到边界H^2-正则性定理时, 其中有一步是构造函数$v = -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$. 证明:$v \in H_0^1(U)$.

2. (Evans Chapter 6 Ex.9) 设u是方程

$$\begin{cases} Lu := -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_i\partial_j u = f \;\; in\, U \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \quad on\, \partial U \end{cases} \tag{2}$$

的光滑解, 其中f是有界的. 固定$x^0 \in \partial U$. C^2函数w被称作x^0处的一个“障碍”, 是指w满足

$$Lw \geq 1 \;\; in\, U, \; w(x^0) = 0, \; w \geq 0 \;\; on\, \partial U.$$

证明: 若w是x^0处的“障碍”, 那么存在正常数C, 使得

$$|Du(x^0)| \leq C \left| \frac{\partial w}{\partial \nu}(x^0) \right|.$$

(Hint: 据弱极值原理, w满足的条件表明, w在x^0处达到最小值. 然后对$u \pm w\|f\|_{L^\infty}$用弱极值原理. 再用Hopf引理去导出$\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0)\right| \le \|f\|_\infty \left|\frac{\partial w}{\partial \nu}(x^0)\right|$. 最后去证明$Du(x^0)$的切方向为零.)

3. (Evans Chapter 6 Ex.10) 假设U是连通的. 用(1)能量法; (2)极大值原理, 去证明如下Neumann问题的唯一光滑解是常数解.

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \ \ in\ U \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \ \ on\ \partial U \end{cases} \tag{3}$$

(Hint: (1)能量泛函$I[w] := \frac{1}{2}\int_U |Dw|^2 dx$, 在$\mathcal{A} := \{w \in C^2(\bar{U}) : \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \ \ on\ \partial U\}$上求临界点即可. (2)反证法, 再用强极大值原理和Hopf定理导出矛盾.)

第十一周

1. 证明$c \ge 0$时的强极大值原理, 即第二版课本350页的定理4.

(Hint: 注意, 在证明过程中你可能会用到Hopf引理的第二条结论.)

2. (Evans Chapter 6 Ex.11) 设$u \in H^1(U)$是如下方程的**有界弱解**:

$$-\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a^{ij}\partial_i u) = 0 \ \ in\ U.$$

设$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是光滑的凸函数, $w = \phi(u)$. 证明:w是原方程的弱下解, 即对于任意非负函数$v \in H_0^1(U)$, 都有$B[w,v] \le 0$.

(Hint: 直接计算$B[w,v]$即可. 在计算过程中, 需要注意**分部积分的可行性**, 所以你也许要先对$v \in C_c^\infty(U)$证明, 再利用逼近得到原估计. 形式上来看, 最后得出的结果应该是$B[w,v] = -\int_U \phi''(u)v\sum_{i,j} a^{ij}\partial_i u\partial_j u \le 0$.)

3. (Evans Chapter 6 Ex.12) 我们称如下的一致椭圆算子

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^n b^i\partial_i u + cu$$

满足**弱极大值原理**, 是指对任意$u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$, 都有

$$\begin{cases} Lu \le 0 \ \ in\ U \\ \ u = \le 0 \ \ \ on\ \partial U \end{cases} \tag{4}$$

蕴含$u \le 0$ in U.

今假设存在函数$v \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$, 使得$Lv \ge 0 \ \ in\ U$, $v > 0 \ \ on\ \bar{U}$. 求证: L满足如上的弱极大值原理.

(Hint: 你可以尝试按如下方法做这道题: 任取$u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$, 满足$Lu \le 0 \ \ in\ U$, $\ u \le 0 \ \ on\ \partial U$. 令$w = u/v$. 去验证$w \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$并直接计算$-a^{ij}\partial_{ij}w = \frac{Lu}{v} - \frac{uLv}{v^2} - b^i\partial_i w + a^{ij}\frac{2}{v}\partial_i w\partial_j v$. 然后令$Mw := -a^{ij}\partial_{ij}w + \partial_i w(b^i - a^{ij}\frac{2}{v}\partial_j v)$, 这里上下指标表示Einstein求和. 然后你再去证明M是一致椭圆算子并满足弱极大值原理. 最后用反证法, 若$\{x \in \bar{U} : u(x) > 0\}$不是空集, 那么就和弱极大值原理矛盾.)

4. (Evans Chapter 6 Ex. 13) (Courant-Fischer 极小极大刻画) 设$L = -\sum_{i,j}\partial_j(a^{ij}\partial_i u)$, 其中$a^{ij}$是对称方阵. 设$L$具有零边值条件, 特征值$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \cdots$. 证明:

$$\lambda_k = \sup_{S \in \Sigma_{k-1}} \inf_{u \in S^\perp, \|u\|_{L^2}=1} B[u,u], \ \ (k \in \mathbb{Z}_+).$$

其中, Σ_{k-1}是$H_0^1(U)$的全体$(k-1)$维线性子空间.

(Hint: 这道题要用到对称紧算子的谱理论. 你可以参看张恭庆《泛函分析讲义(上册)》的定理4.4.7-4.4.8, **但要注意如何合理地利用那两个定理.** 或者你可以这么做: 假设λ_k的某个特征函数是w_k, 模仿课本上去证明:

$$\lambda_k = \inf\{B[u,u] : u \in H_0^1, \|u\|_{L^2} = 1, < u, w_i >_{L^2} = 0, i = 1, \cdots, k-1\}.$$

这样我们就证明了"$\le$". 然后再证明反向的不等式: 给定$(k-1)$维线性子空间S, 根据对称紧算子的谱理论(见张恭庆4.4节Hilbert-Schmidt定理的注释), 可以得出存在$y = \sum_1^k r_i w_i \in \ Span\{w_1, \cdots, w_k\}, \|y\|_{L^2} = 1$满足$y \in S^\perp$, 利用$B[y,y]$去证明反向的不等式.)