2017年春季学期 微分方程II课后作业4

Deadline: 2017.4.11

本次作业中，我们约定U是$\mathbb{R}^n$中的边界光滑的有界开集. 各个PDE中，我们假设系数均属光滑函数，L满足一致椭圆条件.ν是∂U的单位外法向量.

第七周

1. 设X,Y,Z是Banach空间, $f:X\to Y, g:Y\to Z$均是有界线性算子. 证明: 若f,g中有一个是紧算子, 那么$g\circ f:X\to Z$是紧算子.

2. (Evans Chapter 6 Exercise 1) 考虑带位势c的Laplace方程

$$-\Delta u+cu=0 \quad \cdots(*),$$

和散度形式的方程

$$-div(aDv)=0 \quad \cdots(**).$$

其中a是取值为正的函数.

(1)若u是(*)的解, $w>0$也是(*)的解, 证明:$v:=u/w$是(**)在$a=w^2$时的解.

(2)反之, 若v是(**)的解, 证明存在位势函数c, 使得$u=va^{1/2}$是(*)的解.

3. (Evans Chapter 6 Exercise 2) 令

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}\partial_j(a^{ij}\partial_i u)+cu.$$

证明:存在常数$\mu>0$, 使得对应的双线性形式$B[\cdot,\cdot]$满足Lax-Milgram定理的假设, 此处假设$c(x)\geq-\mu \ (x\in U)$.

4. (Evans Chapter 6 Exercise 3) 称$u\in H_0^2(U)$是如下双调和方程边值问题的弱解

$$\begin{cases}\Delta^2 u=f & in\ U\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0 & on\ \partial U,\end{cases} \tag{1}$$

是指

$$\int_U \Delta u\Delta v dx=\int_U fvdx,\ \forall v\in H_0^2(U).$$

如今给定$f\in L^2(U)$, 证明上述方程存在唯一的弱解.

5. (Evans Chapter 6 Exercise 4) 设U是连通集. 称函数$u\in H^1(U)$是如下Neumann问题的弱解

$$\begin{cases}-\Delta u=f & in\ U\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0 & on\ \partial U,\end{cases} \tag{2}$$

是指

$$\forall v\in H^1(U), \int_U Du\cdot Dvdx=\int_U fvdx.$$

如今给定$f\in L^2(U)$. 证明上述方程存在一个弱解, 当且仅当$\int_U fdx=0$.

第八周

1. 在证明椭圆方程第二存在性定理时, 我们在给定L的情况下, 构造了$L^2(U) \to L^2(U)$的紧算子$K := \gamma L_\gamma^{-1}$(其中$\gamma$是能量估计定理中的$\gamma$). 同时, 我们还定义了$L$的伴随算子$L^*$. 那么由$L^*$可以类似构造出$L^2(U) \to L^2(U)$的紧算子$K^*$. 证明:$K^*$是$K$的伴随算子.

2. (Evans Chapter 6 Exercise 5) 对如下带有Robin边界条件的Poisson方程. 如今给定$f \in L^2(U)$, 请给出"$u \in H^1(U)$是该方程的弱解"的定义, 并讨论弱解的存在、唯一性.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & in\, U \\ u + \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & on\, \partial U, \end{cases} \tag{3}$$