2017年春季学期 微分方程II课后作业3

Deadline: 2017.3.28

除特别说明，我们约定U是$\mathbb{R}^n$中的开集。

第五周

1. 设U是$\mathbb{R}^n$中的有界开集, $u \in W_0^{1,\infty}(U)$. 证明:$\|u\|_{L^\infty} \le C\|Du\|_{L^\infty}$. 其中$C > 0$是一个与$n, U$有关的常数.

2. (Evans Ch.5 Exercise 10) 设$u \in C_c^\infty(U), \partial U \in C^\infty$.

(1)设$p \in [2, \infty)$, 证明:$\|Du\|_{L^p} \le C\|u\|_{L^p}^{1/2}\|D^2u\|_{L^p}^{1/2}$;

(2)设$p \in [1, \infty)$, 证明:$\|Du\|_{L^{2p}} \le C\|u\|_{L^\infty}^{1/2}\|D^2u\|_{L^p}^{1/2}$.

(Hint: 第一问, 考虑$\int_U |Du|^p dx = \sum_1^n \int_U \partial_i u \partial_i u |Du|^{p-2}$, 再分部积分去证明$\int_U |Du|^p dx \le C\int_U |u||Du|^{p-2}|D^2u|dx$. 再用Holder不等式即可. 第二问的做法大致与第一问相同, 分部积分之后, 尝试证明$\int_U |Du|^{2p} dx \le C\int_U |u||Du|^{2p-2}|D^2u|dx$. 再用Holder不等式即可, 仅是指标稍作改动.)

3. (Evans Ch.5 Exercise 17) 设$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是$C^1$函数, 且$F'$有界. 设$U$是$\mathbb{R}^n$中的有界开集, $1 \le p \le \infty, u \in W^{1,p}(U)$. 证明: $v := F(u) \in W^{1,p}(U), \partial_i v = F'(u)\partial_i u$. $(1 \le i \le n)$.

4. U是有界开集，$\partial U \in C^1$. 证明:$u \in W^{1,\infty}(U)$a.e.等于一个Lipschitz函数u^*, 且$\|u^*\|_{C^{0,1}(\bar{U})} \le C\|u\|_{W^{1,\infty}(U)}$.

第六周

1. (Evans Ch.5 Exercise 12) 设u是局部可积函数, $V \subset\subset U$. 请举出反例说明: $\|D^h u\|_{L^1(V)} \le C,\ for\ all\ 0 < |h| < \frac{1}{2}dist(V, \partial U)$, 并不能推出$u \in W^{1,1}(V)$.

2. (Evans Ch.5 Exercise 19) 设$u \in H^1(U)$, 请按以下方法证明:$Du = 0$ a.e. on $\{u = 0\}$.

设ϕ是有界、光滑、不减的函数，满足ϕ'有界, $\phi(z) = z, \forall |z| \le 1$. 令$u^\epsilon(x) = \epsilon\phi(u/\epsilon)$. 然后去证明$u^\epsilon$在$H^1(U)$中**弱收敛**于0, 从而

$$\int_U Du^\epsilon \cdot Du dx = \int_U \phi'(\frac{u}{\epsilon})|Du|^2 dx \to 0.$$

利用上述过程，去得到你最终的证明.

Remark: 第六周的第二题, Hint是直接翻译Evans书上的. 注意我们这里说"u^ϵ弱收敛于0 $in\ H^1(U)$",是指"$u^\epsilon, \partial_i u^\epsilon$在$L^2(U)$中弱收敛于0"（事实上这题用到的也就是这句），这个记号在课本第八章第二节才说明，所以需要注意一下。所以在这里你不能直接写泛函课上弱收敛的定义，因为我们并不知道$H^1(U)$的对偶空间是什么, 我们只知道$H^{-1}(U) = (H_0^1(U))'$, 以及$U = \mathbb{R}^d$时, $H_0^1 = H^1$.之后按原Hint接着做就行了. 注意, 由共鸣定理, 我们容易得出如下结论(泛函课本上有):

Proposition: 设X是Banach空间, X'是其对偶空间. 则x_n在X中弱收敛于$x \in X$, 当且仅当$\|x_n\|$有界, 且对X'的稠密子集M中任一元素f, 成立$< f, x_n > \to < f, x >$.

另外, 在实现Hint第二步时, 可能会用到17题(Sobolev函数的链式法则)的结论, 书上17题要求U有界, 但这里$\phi(0) = 0$, 加了这个条件之后链式法则还是对的, 可以参加网页上的习题课勘误.