2017年春季学期 微分方程II课后作业2

Deadline: 2017.3.14

除特别说明，我们约定U是$\mathbb{R}^n$中的开集。

第三周

1. 设$k \in \mathbb{Z}_+$, 证明:$(W^{k,\infty}(U), \|\cdot\|_{W^{k,\infty}(U)})$是Banach空间.

2. 证明$H^k(U) := W^{k,2}(U)$是Hilbert空间, 其内积为

$$< u, v >:= \sum_{|\alpha| \le k} \int_U D^\alpha u D^\alpha v dx.$$

3. 在证明到边的整体逼近定理(第五章5.3.3节定理3)时，其中有一步是$\|D^\alpha v^\epsilon - D^\alpha u_\epsilon\|_{L^p(V)} \to 0$, as $\epsilon \to 0$. 请证明这一步.

4. (Evans Ch.5 Exercise 7) 设U是$\mathbb{R}^n$中的有界开集, 且存在光滑向量场$\vec{\alpha}$, 使得在∂U上有$\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu} \ge 1$, 其中$\vec{\nu}$是$\partial U$的单位外法向量. 设$1 \le p < \infty$.

请对$\int_{\partial U} |u|^p \vec{\alpha} \cdot \vec{\nu} dS$用Gauss-Green公式, 给出如下的迹不等式的另一证明:

$$\forall u \in C^1(\bar{U}), \int_{\partial U} |u|^p dS \le C \left(\int_U |Du|^p + |u|^p dx \right).$$

第四周

1. 设U是有界开集, 边界$\partial U \in C^1$, 证明$W^{1,\infty}$对应的延拓定理.(Hint:这个结论不能用"$W^{1,\infty}$与Lipschitzian等价"来做，因为那个定理用到了此题结论。具体证明可以参见《索伯列夫空间》王明新.)

2. (Evans Ch.5 Exercise 8) 设U是有界开集, 边界$\partial U \in C^1$. 证明: 不存在有界线性算子$T : L^p(U) \to L^p(\partial U)$, 使得对任意$u \in C(\bar{U}) \cap L^p(U)$, 成立$Tu = u|_{\partial U}$.

3. (Evans Ch.5 Exercise 9) 用分部积分证明, 对任意$u \in C_c^\infty(U)$, 成立不等式

$$\|Du\|_{L^2} \le C \|u\|_{L^2}^{1/2} \|D^2 u\|_{L^2}^{1/2}.$$

若进一步设U是有界开集, 边界$\partial U \in C^1$, 证明以上不等式对任何$u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$成立.

(Hint: 取两列紧支集光滑函数$\{v_k\}, \{w_k\}$, 使得这两列函数分别在$H_0^1(U), H^2(U)$中趋于u.)

4. (Evans Ch.5 Exercise 18) 设$1 \le p \le \infty$, U是有界开集. 若$u \in W^{1,p}(U)$

(1)证明: $|u| \in W^{1,p}(U)$.

(2)证明: $u^+, u^- \in W^{1,p}(U)$, 并且弱导数

$$Du^+ = Du \cdot \chi_{u>0} \ \ a.e.$$

$$Du^- = -Du \cdot \chi_{u<0} \ \ a.e.$$

(3)证明: $Du = 0$ a.e. on $\{u = 0\}$.

(Hint: 第二问可以考虑使用17题的结论. 取特殊的$F_\epsilon(x) = ((x^2 + \epsilon^2)^{1/2} - \epsilon) \cdot \chi_{x \ge 0}$, 并注意到$u^+ = \lim_{\epsilon \to 0} F_\epsilon(u)$.)