2017年春季学期 微分方程II课后作业1

Deadline: 2017.2.28

课本上，约定$B(x,r)$为以x为球心, r为半径的闭球. 开球的记号是$B^0(x,r)$.
除特别说明，我们约定U是$\mathbb{R}^n$中的开集。
称$U \subset\subset V$, 是指$\bar{U}$紧, $\bar{U} \subset V$. 并称U是V的紧子集, 或者U关于V是相对紧的.

第一周

1. 设$U \subseteq \mathbb{R}^n$是开集, 令$U_\epsilon := \{x \in U | dist(x, \partial U) > \epsilon\}$.问是否存在某个$\epsilon_0 > 0$, 使得对任何$\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, 满足$U^\epsilon \neq \Phi$, 且$U = U_\epsilon + B^0(0, \epsilon)$.

2. 设$f \in L^p(\mathbb{R}^n), \epsilon > 0, f^\epsilon := f * \eta_\epsilon$. 证明: $f^\epsilon \to f$ in L^p, as $\epsilon \to 0$.

第二周

1. (Evans Chapter 5 Ex.1) 设$k \in \mathbb{N}, 0 < \gamma \leq 1$. 令

$$C^{k,\gamma}(\bar{U}) := \{u \in C^k(\bar{U}) : \|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} < +\infty\}.$$

(1)证明: $(C^{k,\gamma}(\bar{U}), \|\cdot\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})})$是Banach空间.
(2)令

$$|||u|||_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}.$$

证明:上面两个范数是等价范数，从而$(C^{k,\gamma}(\bar{U}), |||\cdot|||_{C^{k,\gamma}(\bar{U})})$是Banach空间.

2. (Evans Chapter 5 Ex.2) 设$0 < \beta < \gamma \leq 1$. 证明不等式:

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} \leq \|u\|_{C^{0,\beta}(\bar{U})}^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}} \|u\|_{C^{0,1}(\bar{U})}^{\frac{\gamma-\beta}{1-\beta}}$$

3. (Evans Chapter 5 Ex.5) 设U, V是开集，$V \subset\subset U$. 证明存在光滑函数ζ, 满足ζ在V上恒为1, 在∂U附近为0. [提示：取开集W, 使得$V \subset\subset W \subset\subset U$, 对$\chi_W$磨光.]

4. (Evans Chapter 5 Ex.6) 设U是有界开集, $U \subset\subset \cup_{i=1}^n V_i$. 证明存在光滑函数$\zeta_1, \cdots, \zeta_N$. 使得对任何$1 \leq i \leq N$, 有$0 \leq \zeta_i \leq 1, Spt(\zeta_i) \subset V_i$, 并在$U$中恒成立等式$\sum_{i=1}^n \zeta_i = 1$.

5. (Evans Chapter 5 Ex.3) 设$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1|, |x_2| < 1\}$. 定义

$$\begin{cases} 1 - x_1, \ \ if\ x_1 > 0, |x_2| < x_1 \\ 1 + x_1, if\ x_1 < 0, |x_2| < -x_1 \\ 1 - x_2, \ \ if\ x_2 > 0, |x_1| < x_2 \\ 1 + x_2, if\ x_2 < 0, |x_1| < -x_2 \end{cases} \tag{1}$$

问哪些$p \in [1, +\infty)$可以使得$u \in W^{1,p}(U)$?

6. (Evans Chapter 5 Ex. 4) 设$n = 1, p \in [1, +\infty), u \in W^{1,p}(0,1)$.
(1)证明: u几乎处处等于一个绝对连续函数, 其导数u'(几乎处处存在)是$L^p(0,1)$函数.

(2)若$1 < p < \infty$, 证明以下不等式对几乎处处的$x, y \in [0,1]$成立:

$$|u(x) - u(y)| \le |x-y|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |u'|^p dt \right)^{1/p}.$$

7. 设$u \in W^{k,p}(U)$, $k \in \mathbb{N}, 1 \le p < \infty$. 证明下面两个范数等价:

$$\|u\|_1 = \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)}, \|u\|_2 = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(U)} \right)^{1/p}.$$