进而又知, 存在正常数 $C=C(n,k)$, 与 p 无关, 使

$$\|Eu\|_{k,p,\mathbb{R}^n}\leqslant C(n,k)\|u\|_{k,p,\mathbb{R}^n_+}.$$

第二步　考虑 $u\in W_p^k(\mathbb{R}^n_+)$ 的情况. 由定理 2.2.5 知, 存在 $u_\ell\in C^k(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, 使得 $\|u_\ell-u\|_{k,p,\mathbb{R}^n_+}\longrightarrow 0$. 利用第一步的结论又知, $Eu_\ell\in C^k(\mathbb{R}^n)$ 并且具有引理的性质 (1) 和 (2). 于是

$$\|Eu_i-Eu_\ell\|_{k,p,\mathbb{R}^n}=\|E(u_i-u_\ell)\|_{k,p,\mathbb{R}^n}\leqslant C(n,k)\|u_i-u_\ell\|_{k,p,\mathbb{R}^n_+}.$$

因为在 $W_p^k(\mathbb{R}^n_+)$ 中 $u_\ell\longrightarrow u$, 由上式得

$$\|Eu_i-Eu_\ell\|_{k,p,\mathbb{R}^n}\longrightarrow 0.$$

故存在 $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ 中的函数, 记为 Eu, 使得在 $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ 中 $Eu_\ell\longrightarrow Eu$. 利用 $\|Eu_\ell\|_{k,p,\mathbb{R}^n}\leqslant C(n,k)\|u_\ell\|_{k,p,\mathbb{R}^n_+}$ 又知, 结论 (2) 对于 $u\in W_p^k(\mathbb{R}^n_+)$ 也成立.

因为在 $\mathbb{R}^n_+$ 上 $Eu_\ell=u_\ell$, 并且 $u_\ell\longrightarrow u$, $Eu_\ell\longrightarrow Eu$ 几乎处处成立, 所以 $Eu=u$ 几乎处处于 $\mathbb{R}^n_+$. 证毕.

引理 2.3.3　存在正常数 $C=C(n,k)$ 和线性映射 $E:W_p^k(B^+)\longrightarrow W_p^k(B)$, 使得对每一个 $v\in W_p^k(B^+)$, 有

(1) 在 B^+ 上 $Ev=v$ 几乎处处成立;

(2) $\|Ev\|_{k,p,B}\leqslant C\|v\|_{k,p,B^+}$.

这里的 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为心的球, B^+ 是上半球. 算子 E 被称为延拓算子.

证明同于引理 2.3.2, 略去.

定理 2.3.1　假设 $1\leqslant p\leqslant\infty$, Ω 有界, $\partial\Omega\in C^k$, $\mathbb{R}^n$ 中的开集 $G\Supset\Omega$, 则存在正常数 $C=C(n,k,\Omega,G)$ 和线性映射 $E:W_p^k(\Omega)\longrightarrow W_p^k(\mathbb{R}^n)$, 使得对每个 $u\in W_p^k(\Omega)$, 都有

(1) 在 Ω 上 $Eu=u$ 几乎处处成立;

(2) $\mathrm{spt}\{Eu\}\Subset G$;

(3) $\|Eu\|_{k,p,G} \leqslant C\|u\|_{k,p,\Omega}$.

算子 E 被称为延拓算子.

证明 第一步 先考虑 $1 \leqslant p < \infty$ 的情况. 因为 $\partial\Omega \in C^k$, 并且是紧的, 利用有限覆盖知, 存在 N 个球 $B_j := B_{r_j}(x_j)$, $x_j \in \partial\Omega$, $r_j > 0$ 和对应的函数 $\phi_j \in C^k(\mathbb{R}^{n-1})$ 满足式 (1.4.5), 由 (1.4.6) 式确定了对应的 Φ_j 和 Ψ_j. 取 $\Omega_0 \Subset \Omega$, 使 $\Omega \subset \Omega_0 \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^N B_j\right)$. 显然, 存在有界开集 G', 使 $\Omega \Subset G' \Subset \Omega_0 \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^N B_j\right)$, $G' \Subset G$.

取 $\{\zeta_j\}_{j=0}^N$ 是 $\overline{\Omega}$ 从属于开覆盖 $\{\Omega_0, B_j\}_{j=1}^N$ 的一个 C^∞-单位分解, 并记 $u_j = u\zeta_j$. 当 $x \in \Omega$ 时, $u = \sum_{j=0}^N u\zeta_j = \sum_{j=0}^N u_j$, 并且成立

$$u_j \in W_p^k(\Omega), \quad j = 0, 1, \cdots, N,$$

$$\operatorname{spt}\{u_0\} \subset \Omega_0, \ \operatorname{spt}\{u_j\} \subset B_j, \quad j = 1, \cdots, N.$$

按照 (1.4.6) 的方式定义 Φ_j 和 Ψ_j. 在 B_j 中作变换: $y = \Phi_j(x)$, 并记 $v_j(y) = u_j(\Psi_j(y)), O_j = \Phi_j(\Omega \cap B_j), j = 1, \cdots, N$, 则 $v_j \in W_p^k(O_j)$, 并且 O_j 的一部分边界位于超平面 $\{y_n = 0\}$ 上, O_j 内的点满足 $y_n > 0$. 由于 $\operatorname{spt}\{u_j\} \subset B_j$, 所以 v_j 在 $\partial O_j \bigcap \{y_n > 0\}$ 的附近为零. 因为 $\Phi_j, \Psi_j \in C^k(\mathbb{R}^n)$, 利用 $v_j(y)$ 与 $u_j(x)$ 之间的关系易知

$$C^{-1}\|v_j\|_{k,p,O_j} \leqslant \|u_j\|_{k,p,\Omega\cap B_j} \leqslant C\|v_j\|_{k,p,O_j}, \tag{2.3.4}$$

其中正常数 C 不依赖于 p, 仅由 k, B_j 和 $D^\alpha\phi_j$ ($|\alpha| \leqslant k$) 确定.

把 v_j 在 $\mathbb{R}_+^n \setminus O_j$ 上延拓为零, 那么 $v_j \in W_p^k(\mathbb{R}_+^n)$. 利用引理 2.3.2 知, 存在 $Ev_j \in W_p^k(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$(Ev_j)(y) = v_j(y), \quad y \in \mathbb{R}_+^n,$$

$$\|Ev_j\|_{k,p,\mathbb{R}^n} \leqslant C(n,k)\|v_j\|_{k,p,\mathbb{R}_+^n} = C(n,k)\|v_j\|_{k,p,O_j}.$$

利用估计式 (2.3.4) 又得

$$\|Ev_j\|_{k,p,\mathbb{R}^n} \leqslant C(n,k,\Omega)\|u_j\|_{k,p,\Omega\cap B_j}. \tag{2.3.5}$$

令 $w_j = (Ev_j)(\Phi_j(x))$, $w = u_0 + \sum_{j=1}^N w_j$, 那么 $w \in W_p^k(\mathbb{R}^n)$, 并且在 Ω 上 $w = u$. 同上, 存在仅依赖于 k 和 ϕ_j 的正常数 C, 使得

$$\|w_j\|_{k,p,\mathbb{R}^n} \leqslant C\|Ev_j\|_{k,p,\mathbb{R}^n}.$$

再利用 L^p 中的 Minkowski 不等式及式 (2.3.5) 知

$$\begin{aligned}\|w\|_{k,p,\mathbb{R}^n} &\leqslant \|u_0\|_{k,p,\mathbb{R}^n} + \sum_{j=1}^N \|w_j\|_{k,p,\mathbb{R}^n} \\ &\leqslant \|u_0\|_{k,p,\Omega_0} + C\sum_{j=1}^N \|u_j\|_{k,p,\Omega\cap B_j} \\ &\leqslant C\|u\|_{k,p,\Omega},\end{aligned}$$

这里的常数 C 也不依赖于 p.

取一个截断函数 $\zeta \in C_0^\infty(G')$, 在 Ω 上 $\zeta \equiv 1$. 令 $Eu = \zeta w$, 那么 $\mathrm{spt}\{Eu\} \subset G' \Subset G, Eu \in W_p^k(G)$, 在 Ω 上 $Eu = u$. 映射 E 的线性性质以及不等式

$$\|Eu\|_{k,p,G} \leqslant C(n,k,\Omega,G)\|u\|_{k,p,\Omega}$$

都是显然的.

第二步 考虑 $p = \infty$ 的情况. 设 $u \in W_\infty^k(\Omega)$. 因为 Ω 有界, 所以对任意的 $1 \leqslant p < \infty$, 都有 $u \in W_p^k(\Omega)$, 并且还存在仅依赖于 k 和 Ω 的正常数 $C(k,\Omega)$, 使得

$$\|u\|_{k,p,\Omega} \leqslant C(k,\Omega)\|u\|_{k,\infty,\Omega}, \quad \forall\, 1 \leqslant p < \infty,\ u \in W_\infty^k(\Omega).$$

利用第一步证得的结论知, 存在 $E_p u \in W_p^k(\mathbb{R}^n)$, 使得 $E_p u = u$ 在 Ω 上几乎处处成立, $\mathrm{spt}\{E_p u\} \Subset G' \Subset G$, 并且存在与 p 无关的正常数 C, 使得

$$\|E_p u\|_{k,p,G} \leqslant C\|u\|_{k,p,\Omega} \leqslant C\|u\|_{k,\infty,\Omega}.$$

容易看出, 当 $j \geqslant p$ 时, $E_j u \in W_p^k(G)$, 并且还可以选取一个与 j 和 p 无关的常数 C, 使得

$$\|E_j u\|_{k,p,G} \leqslant C\|E_j u\|_{k,j,G} \leqslant C\|u\|_{k,\infty,\Omega}, \quad \forall\, j \geqslant p.$$

这说明 $\{E_j u\}_{j=p}^{\infty}$ 是 $W_p^k(G)$ 中的有界列, 因而存在子列, 记为 $\{E_{jp}u\}$, 存在函数 $u_p \in W_p^k(G)$, 使得在 $W_p^k(G)$ 中 $E_{jp}u \rightharpoonup u_p$. 显然, $u_p = u$ 在 Ω 上几乎处处成立, $\operatorname{spt}\{u_p\} \subset \overline{G'}$ (因为 $\operatorname{spt}\{E_{jp}u\} \Subset G'$), 并且

$$\|u_p\|_{k,p,G} \leqslant \|E_{jp}u\|_{k,p,G} \leqslant C\|u\|_{k,\infty,\Omega}.$$

先取 $p=1$, 得到序列 $\{E_{j1}u\}$ 和 $u_1 \in W_1^k(G)$, 在 $W_1^k(G)$ 中 $E_{j1}u \rightharpoonup u_1$. 再取 $p=2$, 同上, $\{E_{j1}u\}$ 是 $W_2^k(G)$ 中的有界列, 故存在 $\{E_{j1}u\}$ 的子列 $\{E_{j2}u\}$ 和 $u_2 \in W_2^k(G)$, 在 $W_2^k(G)$ 中 $E_{j2}u \rightharpoonup u_2$. 易证, $u_2 \in W_1^k(G)$ 并且在 $W_1^k(G)$ 中 $u_2 = u_1$. 从而, $u_1 \in W_2^k(G)$. 重复这样做下去, 利用抽对角线方法便可得到序列 $\{E_{jj}u\}$ 和函数 u_* (事实上, $u_* = u_j$ 对于 $j=1,2,\cdots$ 都成立), 满足:

(i) 对于任意的 $1 \leqslant q<\infty$, 有 $u_* \in W_q^k(G)$, $\|u_*\|_{k,q,G} \leqslant C\|u\|_{k,\infty,\Omega}$, 并且在 $W_q^k(G)$ 中 $E_{jj}u \rightharpoonup u_*$;

(ii) $u_* = u$ 在 Ω 上几乎处处成立, $\operatorname{spt}\{u_*\} \subset \overline{G'} \Subset G$.

利用定理 1.3.7 的 (2), 从事实 (i) 推知 $u_* \in W_\infty^k(G)$ 并且 $\|u_*\|_{k,\infty,G} \leqslant C\|u\|_{k,\infty,\Omega}$. 再由事实 (ii) 知,

$$u_* \in W_\infty^k(\mathbb{R}^n), \quad \|u_*\|_{k,\infty,\mathbb{R}^n} \leqslant C\|u\|_{k,\infty,\Omega}.$$

若定义 $E_\infty u = u_*$, 那么 E_∞ 的线性性质可以从 E_p 的线性性质和证明过程中看出. 因而, $E_\infty u = u_*$ 即是所要的延拓. 证毕.

定理 2.3.2 下面的稠密性结论成立:

(1) $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ 在 $W_p^k(\mathbb{R}_+^n)$ 中稠密. 这里, $u \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ 是指 $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, 并且存在 $K>0$, 当 $x \in \overline{\mathbb{R}_+^n}$ 且 $|x| \geqslant K$ 时 $u(x)=0$;

(2) 如果 Ω 有界并且 $\partial\Omega \in C^k$, 那么 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 在 $W_p^k(\Omega)$ 中稠密.

证明　记 $A=\Omega$ 或者 $A=\mathbb{R}_+^n$, 并设 $u \in W_p^k(A)$. 当 $A=\Omega$ 时利用定理 2.3.1, 当 $A=\mathbb{R}_+^n$ 时利用引理 2.3.2, 总存在 $v \in W_p^k(\mathbb{R}^n)$, 使得在 A 上 $v=u$ 并且 $\|v\|_{k,p,\mathbb{R}^n} \leqslant C\|u\|_{k,p,A}$.

因为 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ 中稠密 (定理 2.2.6), 故存在 $v_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 在 $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ 中 $v_j \longrightarrow v$. 显然, 当 $A=\mathbb{R}_+^n$ 时 $v_j \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, 当 $A=\Omega$

时 $v_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$, 并且

$$\|v_j - u\|_{k,p,A} = \|v_j - v\|_{k,p,A} \leqslant \|v_j - v\|_{k,p,\mathbb{R}^n} \longrightarrow 0.$$

2.4 边界迹和迹定理

给定一个函数 $u \in C(\overline{\Omega})$, 我们知道 u 在 $\partial\Omega$ 上的值. 给定一个函数 $u \in W_p^k(\Omega)$, $k \geqslant 1$, 如何确定 u 在 $\partial\Omega$ 上的值呢? 虽然 $\partial\Omega$ 是 $n-1$ 维的, 任意改变 u 在 $\partial\Omega$ 上的值, 都不影响 u 在 Ω 上的可积性与其积分值, 但是会影响其弱导数. 因此, 对于 $W_p^k(\Omega)$ 中的函数 u 而言, 简单地讲 u 在 $\partial\Omega$ 上的值是没有意义的. 但是在函数空间以及偏微分方程的研究中, 通常会涉及 $W_p^k(\Omega)$ 中的函数在 $\partial\Omega$ 上的 "广义取值", 这就是我们将要引入的边界迹 (有时也简称为迹). 对于给定的 $u \in W_p^k(\Omega)$, $k \geqslant 1$, 在某个等价类中 u 在边界上的迹是唯一确定的.

我们先讨论空间 $W_p^1(\Omega)$.

定理 2.4.1 设 Ω 有界, $\partial\Omega \in C^1$, 那么存在一个有界线性算子

$$\gamma_0 : W_p^1(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

和一个正常数 $C = C(n,p,\Omega)$, 使得

(1) $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$ 对所有 $u \in W_p^1(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ 成立;

(2) $\|\gamma_0 u\|_{p,\partial\Omega} \leqslant C\|u\|_{1,p,\Omega}$, $\forall\, u \in W_p^1(\Omega)$.

称 γ_0 是迹算子, $\gamma_0 u$ 是函数 u 在 $\partial\Omega$ 上的零次迹.

证明 先假设 $u \in C^1(\overline{\Omega})$. 给定 $x_0 \in \partial\Omega$, 并假设在 x_0 的邻域内 $\partial\Omega$ 位于超平面 $\{x_n = 0\}$ 上, 且存在 $r > 0$ 使得 $B_r(x_0) \cap \Omega = B_r^+(x_0)$. 简记 $B = B_r(x_0)$, $\Gamma = \partial\Omega \cap B_{r/2}(x_0)$.

选取 $\zeta \in C_0^\infty(B)$, 在 B 内 $\zeta \geqslant 0$, 并且在 $B_{r/2}(x_0)$ 内 $\zeta \equiv 1$. 记 $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$. 运用 Young 不等式, 直接计算知

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma |u|^p \mathrm{d}x' &\leqslant \int_{x_n=0} \zeta |u|^p \mathrm{d}x' = -\int_{B^+} (\zeta|u|^p)_{x_n} \mathrm{d}x \\
&= -\int_{B^+} \left[|u|^p \zeta_{x_n} + p|u|^{p-1}(\mathrm{sgn} u) u_{x_n} \zeta\right] \mathrm{d}x \\
&\leqslant C \int_{B^+} \left(|u|^p + |Du|^p\right) \mathrm{d}x. \qquad (2.4.1)
\end{aligned}$$