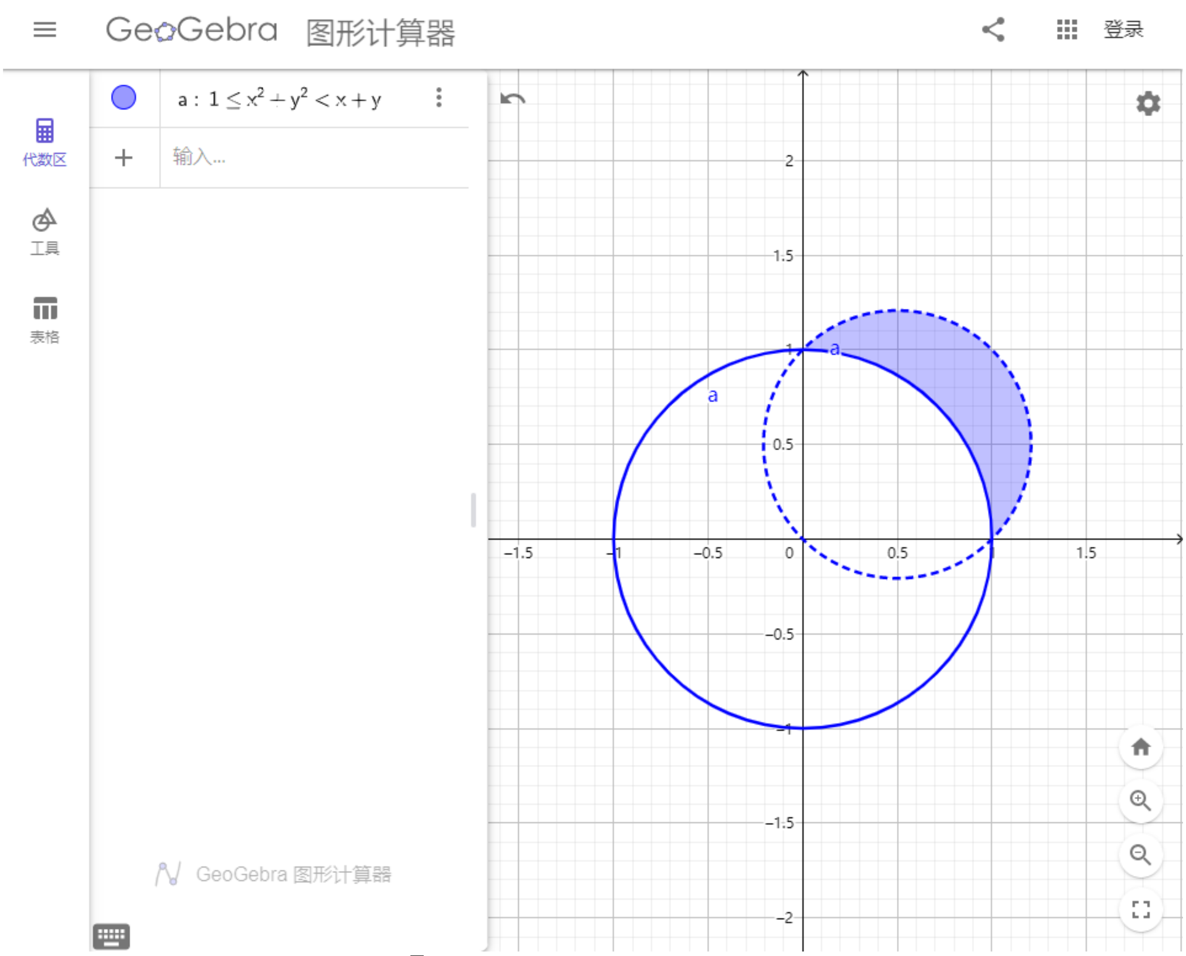
2020

2021.8 ©brealid@mail.ustc.edu.cn

一、填空题

1. $[-3,-2]$ 和 $[-1,+\infty)$
2. $b=\frac{7\pi}{2}-9$
   解：平移后得到
   $y=\sin(3(x-3))=\sin(3x-9)=\cos(3x-9-\frac{\pi}{2})=\cos(3x-9+\frac{7\pi}{2})$
3. $\frac{1}{2}$
   画出来的区域类似这样：
   

   因此 $S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})^2-\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2$
4. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
   解：原式

$$
\begin{aligned}
&= (1+7+\cdots+2017)\frac{\sqrt{3}}{2}+(2+8+\cdots+2018)\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\quad(4+10+\cdots+2020)\frac{-\sqrt{3}}{2}+(5+11+\cdots+2015)\frac{-\sqrt{3}}{2}\\
&= (1-4+7-10+\cdots+2017-2020)\frac{\sqrt{3}}{2}+\\
&\quad(2-5+8-11+\cdots+2012-2015)\frac{\sqrt{3}}{2}+2018\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= -3\cdot(337+336)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+2018\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

5. $\frac{5}{3}$

   解：

   联立 $\begin{cases}4\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=9\\ \vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=16\\ \vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=25\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\vec{a}^2=\frac{52}{9}\\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{50}{9}\\ \vec{b}^2=\frac{73}{9}\end{cases}$

   因此 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$

6. $\arccos(-\frac{7}{8})R$

   解：建系，可知这两个点到球心连线的夹角 θ 的 cos 值为 $-\frac{7}{8}$。因此球面距离为 $\arccos(-\frac{7}{8})R$

7. $\sqrt{\frac{1}{54\pi}}$

   解：设底面半径为 r，高为 h，则条件为 $2\pi r^2+2\pi rh=1$，即 $h=\frac{1}{2\pi r}-r$。

   而体积为 $V=\pi r^2h=\frac{r}{2}-\pi r^3$。

   求导，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}-3\pi r^2$，所以 $V_{\max}$ 在 $r=\sqrt{\frac{1}{6\pi}}$ 处取到。

   此时 $V=\sqrt{\frac{1}{54\pi}}$

8. $a\in(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$

   解：显然 $x=0$ 是方程的一个根。

   设 $f(x)=a=\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$，求导可知 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递减，且 $f(x)\in(0,+\infty)$。

   除此之外，我们需要排除 $x=0$ 的情况（此时为重根），所以

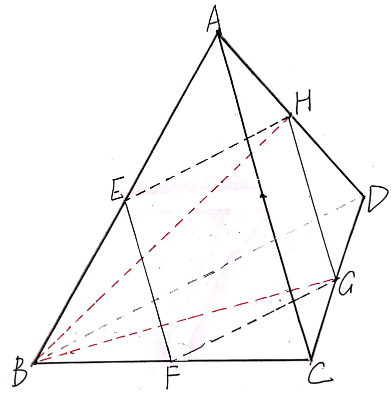
   $a\neq\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{2}=\frac{1}{2}$

   所以 $a\in(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$ 时 $\ln(1+x)-x+ax^2=0$ 有两个不等实根。

二、解答题

9. ◦ (1) 显然（使用 中位线定理 易证）

- (2) 解：
  由相似 $d_{A-EFGH} = d_{B-EFGH}$
  因此 $V_{A-EFGH} = V_{B-EFGH}$
  又因为 $S_{\triangle FCG} = \frac{1}{2}S_{\triangle BDG}, d_{A-BCD} = 2d_{H-BCD}$
  所以 $V_{A-FCG} = V_{H-BDG}$
  又因为（显然）$V_{A-EFGH} = V_{B_EFGH}$
  所以 $V_{A-FCG} + V_{A-EFGH} = V_{H-BDG} + V_{B_EFGH}$
  即平面 $EFGH$ 分四棱锥 $ABCD$ 为两个体积相等的部分



10. 双曲线上任意一点 (x_0, y_0) 的切线斜率 $k_l = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}$
    因此切线方程为 $l: a^2y_0(y-y_0) = b^2x_0(x-x_0)$。
    与 $y = \frac{b}{a}x$ 联立得到 $x_A = \frac{a^2y_0^2-b^2x_0^2}{aby_0-b^2x_0}$
    与 $y = -\frac{b}{a}x$ 联立得到 $x_B = \frac{a^2y_0^2-b^2x_0^2}{-aby_0-b^2x_0}$
    由于 $a^2y_0^2 - b^2x_0^2 = a^2b^2$
    所以 $S_{\triangle OAB} = \left|\frac{x_Ay_B-y_Ax_B}{2}\right| = \left|\frac{b}{a}x_Ax_B\right| = \left|\frac{b}{a}\cdot\frac{(a^2y_0^2-b^2x_0^2)^2}{b^2(b^2x_0^2-a^2y_0^2)}\right| = ab$
11. 显然 $\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Z] = n+1$。我们考虑求 $\mathbb{E}[X]$。
    $\mathbb{E}[X] = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_{n-i}^2}{C_n^3} = \frac{n+1}{4}$ （拆解开后对同次幂项求和易得）
    $\therefore \mathbb{E}[Z] = (n+1) - \mathbb{E}[X] = \frac{3n+3}{4}$
    $\therefore \mathbb{E}[Z] = 3\mathbb{E}[X]$，证毕
12. 最小为 $2(n-1)$，最大为 $\lfloor\frac{n^2}{2}\rfloor$。
    - 首先给出一种构造，使最小最大值成立：
      - 排列 $a = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 使得最小值 $2(n-1)$ 成立
      - 【n 为偶数时】排列 $a = \{1, n, 2, n-1, \dots, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\}$ 使得最大值 $\frac{n^2}{2} = \lfloor\frac{n^2}{2}\rfloor$ 成立
      - 【n 为奇数时】排列 $a = \{1, n, 2, n-1, \dots, \frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}, \frac{n+1}{2}\}$ 使得最大值 $\frac{n^2-1}{2} = \lfloor\frac{n^2}{2}\rfloor$成立
    - 然后证明没有更小/更大的构造存在：
      - 设 $a_x = 1, a_y = n$，则从 x 到 y 的绝对值和 $\sum_{i=x}^{y-1}|a_i - a_{i+1}| \geq |a_x - a_y| = n-1$（$x > y$ 类似亦然），从 y 到 x 的绝对值和 $\sum_{i=y}^{x-1}|a_i - a_{i+1}| \geq |a_y - a_x| = n-1$（$x < y$ 类似亦然），因此 $S \geq (n-1)+(n-1) = 2n-2$。因此没有更小的构造存在。
      - 我们发现每个数 s 恰好会在和式中出现 2 次，每次出现系数必为 $-1, 1$ 之一。不妨设 k_s 表示数字 s 前的系数总和。显然 $k_1 = -2, k_n = 2$，$\sum_{s=1}^{n} k_s = 0$，$S = \sum_{s=1}^{n} k_s s$。当 $k_1 = k_2 = \dots = k_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} = -2$，$k_{\lfloor\frac{n+3}{2}\rfloor} = k_{\lfloor\frac{n+5}{2}\rfloor} = \dots = k_n = 2$ 时，显然是 S 的上界。计算可知，此时的 $S = \lfloor\frac{n^2}{2}\rfloor$。因此没有更大的构造存在。