2013

2021.8 ©brealid@mail.ustc.edu.cn

一

设 $\overline{BD} = \overline{CD} = x$，利用余弦公式解方程得 $x = \sqrt{21}$，进而 $S = 10\sqrt{3}$

二

$S_{投影} = \frac{7}{8}$
$cos\theta_{面面角} = \frac{3}{\sqrt{17}}$
$S = \frac{S_{投影}}{cos\theta_{面面角}} = \frac{7\sqrt{17}}{24}$

三

思路 1

将抛物线方程 $y = x^2$ 带入圆方程 $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$，得到 $x^4 + (2B+1)x^2 + 2Ax + C = 0$，因此 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$。

另一方面，$k_1 + k_2 = \frac{x_a - x_b}{y_a - y_b} + \frac{x_c - x_d}{y_c - y_d} = \frac{1}{x_a + x_b} + \frac{1}{x_c + x_d}$，所以无论 $(x_a, y_a), (x_b, y_b), (x_c, y_c), (x_d, y_d)$ 与 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ 如何对应，都有 $k_1 + k_2 = 0$。证毕。

思路 2

1. 证明 $AB//CD \Leftrightarrow AC//BD \Leftrightarrow AD//BC$
2. 设有两条斜率相反的直线 AB, CD 分别交抛物线 $y = x^2$ 于 A, B 和 C, D
3. 利用曲线系方程证明 A, B, C, D 四点共圆
   具体地，设 $\begin{cases} l_{AB} : eq1 \\ l_{CD} : eq2 \\ y = x^2 : eq3 \end{cases}$，则曲线系方程为 $\lambda \cdot eq1 \cdot eq2 + \mu \cdot eq3 = 0$。分析二次项 xy 的系数即可得到结果。

四

$a=-\frac{x^3+1}{x^2}=-x-\frac{1}{x^2}$
求导得 $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}=-1+\frac{2}{x^3}$

$x\in$	$(-\infty,0)$	$(0,\sqrt[3]{2})$	$(\sqrt[3]{2},+\infty)$
趋势	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
$a\in$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,-\frac{2}{3}\sqrt[3]{2})$	$(-\infty,-\frac{2}{3}\sqrt[3]{2})$

所以 $a\in(-\frac{2}{3}\sqrt[3]{2},+\infty)$

五

易证 $a_n=n^2$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}&=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n^2}\\&<1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(n-0.5)(n+0.5)}\\&=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n-0.5}-\frac{1}{n+0.5}\\&=1+\frac{1}{2-0.5}-\frac{1}{n+0.5}\\&=\frac{5}{3}-\frac{1}{n+0.5}\\&<\frac{5}{3}\end{aligned}$$

六

ξ	0	1	…	m	…	k
$P(\xi)$	$\frac{C_{n-k}^{k}}{C_n^k}$	$\frac{C_k^1C_{n-k}^{k-1}}{C_n^k}$	$\dots$	$\frac{C_k^mC_{n-k}^{k-m}}{C_n^k}$	$\dots$	$\frac{1}{C_n^k}$

$P(\xi)=\frac{k^2}{n}$

注意到，当 $k>\frac{1}{2}n$ 时，如果延伸定义 $C_n^m=0$（当 $n<m$ 或 $n<0$ 或 $m<0$ 时），则分布列不需要更改仍然成立