2017

2021.8 ©brealid@mail.ustc.edu.cn

1. $y = sin(2x-3)-1$
2. $1+\sqrt{6}$（$x^2-2x-5=0$）
3. 17（$a_n = 0.2n+0.6$）
4. $2^{1009}-1+i$
5. $\frac{1}{\sqrt{5}}$
6. $b<d<c<a$
7. -2（$-2 \le \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \le \frac{22}{25}$）
8. 9
9. $1-8p^3$
10. 1889
    - 解：$2017_{(10)} = 11111100001_{(2)}$
    - $\text{popcount}(11111100001_{(2)}) = 7$
    - $answer = 2017-2^7 = 1889$
11. $\frac{(x-1.5)^2}{3}+(y-0.5)^2=1$，理由如下：
    - 设 $P=(3,1)$，则 $k_{PM}=k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_M}{y_M}$
    - 所以 $\frac{y_M-1}{x_M-3}=-\frac{1}{3}\frac{x_M}{y_M}$
    - 化简得 $\frac{(x-1.5)^2}{3}+(y-0.5)^2=1$
12.
    1. 如果不成立，不妨设 l 不平行于 AB，那么因为 $l, AM\subset$ 平面PAB，所以 l 与 AM 有交点，不妨设 $l\cap AM = D$。因为 l, AM 共面而不共线，所以 $l\not\subset$ 平面$ABCD$。所以 $l\cap$ 平面$ABCD = P$，又因为 $CD\subset$ 平面$ABCD$ 所以 l, CD 不共面。矛盾！
    2. 显然有事实 $h\le \min\{\frac{1}{2}AB, \frac{1}{2}AD\}=1$，且易想象出等号成立的情况（即：存在）。所以 $V\le\frac{1}{3}AB\times AD\times h = 2$
13. $1<S<2$，理由如下：
    - 记 $x=\frac{bc}{a^2}, y=\frac{ac}{b^2}, z=\frac{ab}{c^2}$，则 $S=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}$，且 $xyz=1$
    - 不妨设 $z\le 1$，则 $xy\ge 1$， $S=\frac{1+x+y+1}{1+x+y+xy}+\frac{1}{1+z}<1+\frac{1}{1+z}<1+1=2$。取 $x=n^2, y=z=\frac{1}{n}$，并使 $n\to+\infty$，则两个不等号充分逼近。
    - 不妨设 $z\ge 1$，则 $xy\le 1$， $S=\frac{1+x+y+1}{1+x+y+xy}+\frac{1}{1+z}>1+\frac{1}{1+z}>1$。取 $x=z=n, y=\frac{1}{n^2}$，并使 $n\to+\infty$，则不等号充分逼近。
14. 要满足题设条件，只需要 $(a,b)=1$ 即可。
    - 必要性：

      > - 如果题设成立，那么首先有 $(x_{m+1}, x_m)=x_1=1$。
      > - 由于 $(x_{m+1}, x_m)=(ax_m+bx_{m-1}, x_m)=(bx_{m-1}, x_m)$，所以 $(bx_{m-1}, x_m)=1$，所以 $(b, x_m)=1$。

    - 因为 $(b,x_m)=(b,ax_{m-1}+bx_{m-2})=(b,ax_{m-1})$，所以 $(b,ax_{m-1})=1$，所以 $(b,a)=1$ 即 $(a,b)=1$

- 充分性：
    - 首先易证 $x_n=x_ix_{n-i+1}+bx_{i-1}x_{n-i}$（归纳递推可得）。取 $i=n-m$ 得 $x_n=x_{n-m}x_{m+1}+bx_{n-m-1}x_m$。所以 $(x_m,x_n)=(x_m,x_{n-m}x_{m+1}+bx_{n-m-1}x_m)=(x_m,x_{n-m}x_{m+1})$。因此，如果 $(x_m,x_{m+1})=1$，则我们证明了**辗转相除性**$(x_m,x_n)=(x_m,x_{n-m})$，则由**欧几里得辗转相除法**知 $(x_m,x_n)=x_{(m,n)}$
    - 考虑证明 $(a,b)=1$ 时 $(x_m,x_{m+1})=1$：
        1. 因为 $(x_m,x_{m+1})=(x_m,ax_m+bx_{m-1})=(x_m,bx_{m-1})$，所以如果 $(x_m,b)=1$，则 $(x_m,x_{m+1})=(x_m,x_{m-1})=\cdots=(x_2,x_1)=1$
        2. 要证 $(x_m,b)=1$，考虑到 $(x_m,b)=(ax_{m-1}+bx_{m-2},b)=(ax_{m-1},b)\overset{\because(a,b)=1}{=}(x_{m-1},b)$，同样可用数学归纳法证得。