2019

2021.8 ©brealid@mail.ustc.edu.cn

一、填空题

1. $k=1346$
   解：记 $f_k=\frac{2^k}{k!(2019-k)!}$，则 $\frac{f_k}{f_{k-1}}=\frac{2(2020-k)}{k}$。
   所以 $k\le 1346$ 时 $\frac{f_k}{f_{k-1}}>1$；$k\ge 1347$ 时 $\frac{f_k}{f_{k-1}}<1$。
   即答案为 $k=1346$
2. $1\pm\sqrt{2-x}$
3. $\cos A\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$
   解：
   - 首先，我们知道 $1<\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$
     将 $\cos A+\cos B$ 代换成 $2\cos C$，可以得到 $1<3\cos C\le\frac{3}{2}$
     因此 $\cos A\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$
   - 关于**右区间**的另一种证明
     $\because \cos B+\cos C=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\le 2\cos\frac{B+C}{2}=2\sin\frac{A}{2}$
     $\therefore \cos A\le\sin\frac{A}{2}$
     $\therefore 1-2\sin^2\frac{A}{2}\le\sin\frac{A}{2}$
     解得 $\sin\frac{A}{2}\ge\frac{1}{2}$
     所以 $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}\le\frac{1}{2}$
4. $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$
   解：切点弦方程 $\frac{x_0x}{3}-\frac{y_0y}{4}=1$，带入 $x_0=1,y_0=2$ 即得答案
5. $\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=2019}\max(2019-2x,0)}{C_{2019}^2}=\frac{\sum\limits_{x=1}^{x=1009}2019-2x}{C_{2019}^2}=\frac{1009}{2019}$
   这里 x 表示任选的两个正整数中较小的那个
6. $\rho=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$
   解：易发现该曲线表示一个椭圆，其形状同 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$。而且易发现 $(0,0)$ 是这个椭圆的一个焦点。因此，极坐标方程为 $\rho=\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}=\frac{2(1-(\frac{1}{2})^2)}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}(=\frac{3}{2-\cos\theta})$
   另解：暴力化简 $\frac{(\rho\cos\theta-1)^2}{4}+\frac{(\rho\sin\theta)^2}{3}=1$ 也可

二、解答题

7. 体积为 $\frac{14\sqrt{3}}{27}$

- 【证明 $\cos\theta = -\frac{1}{3}$】首先，设点 P 使得 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$ 由空间想象易知 A, B, C, P 组成了一个中心为 O 的正四棱锥的顶点。此时，建系使 $\overrightarrow{OP} = (0, 0, 1)$ 且 A 在 xz 平面上，再结合高中知识可易求出
  $\overrightarrow{OA} = (\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0, -\frac{1}{3}), \overrightarrow{OB} = (-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}), \overrightarrow{OC} = (-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3})$，此时易证 $\cos\theta = -\frac{1}{3}$
- 【计算四面体体积】然后考虑计算体积。显然四棱锥 $P-ABC$ 的高 $h_1 = \frac{4}{3}$，底边边长 $a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$，因此四棱锥 $D-ABC$ 的高 $h_2 = h_1 + 1 = \frac{7}{3}$，所以
  $V_{D-ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot h_2 = \frac{14\sqrt{3}}{27}$

8. 原式等价于求证 $1 < \frac{1}{\frac{a}{d}+1} + \frac{1}{\frac{b}{d}+1} + \frac{1}{\frac{c}{d}+1} < 2$
   等价于在 $xyz = \frac{1}{d^3}$ 的前提下求证 $1 < \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} < 2$
   这可以让人联想到**2017数学入学考**的第13题。我们尝试采用类似的方法解决这道题。下记 $S = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}$。
   - 首先证明右边的不等号。显然 x, y, z 中至少有一个 $\leq \frac{1}{d} < 1$，不妨设为 z，则 $xy > 1$。
     $\therefore S = \frac{1+x+y+1}{1+x+y+xy} + \frac{1}{1+z} < 1 + 1 = 2$。此题我们不需要证明不等号充分逼近。
   - 然后证明左边的不等号。显然 x, y, z 中至少有一个 $> \frac{1}{d^3}$，不妨设为 z，则 $xy < 1$。
     $\therefore S = \frac{1+x+y+1}{1+x+y+xy} + \frac{1}{1+z} > \frac{1+x+y+1}{1+x+y+xy} > 1$。此题我们不需要证明不等号充分逼近。
   - 证毕

9. 4038 个不同实数解
   解：【不正规方法】我们尝试求出 $f_n(x) = \frac{n}{2}$ 的解的个数 $c(n)$。
   通过手画分析，我们可以得到
   $c(0) = 1, c(1) = 2, c(2) = 4, c(3) = 6, c(4) = 8, c(5) = 10 \ldots$
   找规律可得，$c(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$
   因此答案为 $c(2019) = 4038$