中 国 科 学 技 术 大 学

2024年春实分析(H)期中考试试题

姓名: ____________________ 学号: ____________________

(共 10 题)

1. (10分)　叙述$[a,b]$中Lebeguec可测函数的定义. 并解释为何在Lebesgue积分论中必须引入可测函数的概念。

2. (10分)　判断下列说法是否正确，证明或举反例：

假设$f:[a,b]\longrightarrow[a,b]$是单调增加的连续函数，而且既是单射又是满射，则$[a,b]$中任意Lebesgue可测子集在$f$映照下的原像必是Lebesgue可测集。

3. (10分)　假设$k \in \mathbb{N}$, $a_1^k, \cdots, a_n^k, b_k \in \mathbb{R}$ 而且

$$(a_1^k)^2 + \cdots (a_n^k)^2 = 1.$$

我们定义

$$E_k = \left\{ x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1^k x_1 + \cdots + a_n^k x_n = b_k \right\}.$$

证明

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \neq \mathbb{R}^n.$$

4 (10分)　假设$f:\mathbb{R}\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\\ \\ +\infty, & x=0.\end{cases}$$

由Lebesgue可积函数的定义出发, 证明该函数在$\mathbb{R}$上不是Lebesgue可积函数(利用其它方法，得分为零)。

5 (10分)　假设$f:[a,b]\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$是非负有界可测函数，证明

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \inf_{f\leqslant\psi}\int_{[a,b]}\psi(x)dx$$

其中$\psi:[a,b]\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$是非负简单可测函数。

6. (10分)　考虑函数列

$$\Big\{f_{1,1}, f_{2,1}, f_{2,2}, \cdots, f_{n,1}, f_{n,2}, \cdots, f_{n,n}, \cdots\Big\}.$$

其中$f_{n,j} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 定义如下:

$$f_{n,j}(x) = \chi_{[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n})}(x), \qquad j = 1, \cdots, n; \qquad n \in \mathbb{N}.$$

说明该函数列是否在下列意义下收敛：

以测度收敛，逐点收敛，几乎处处收敛，几乎一致收敛，以L^1收敛。

7. (10分)　判断下列说法是否正确, 证明或举反例：

假设$E \subset \mathbb{R}$是Lebesgue可测集合，而且E是闭集，$m(E) = 1$，则E必有内点。

8. (10分)　假设$E \subset \mathbb{R}^n$是一个有限测度的可测集. 函数$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$定义为

$$f(x) = \int_E \chi_{x+E}(y)dy.$$

证明：函数f在$0 \in \mathbb{R}^n$处是连续的。

9. (10分)　假设$g\colon [0,1]\to[0,1]$是Lebesgue可测函数，$f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$是连续函数，并且$f(0)\leqslant f(1)$。证明下列极限存在并且属于区间$[f(0),f(1)]$：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f\left((g(x))^n\right)dx.$$

10. (10分)　假设$\alpha > 0$. 函数$G : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$定义为

$$G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x(t+t^{-1})}(t^{1+\alpha} + t^{1-\alpha})dt.$$

证明：G是良好定义的，并且$G \in C^\infty(0, +\infty)$.