中国科学技术大学期中考试

2023—2024 学年第二学期

课程名称: 复分析 (H)

姓　　名: ________　　　　学　　号: ________

学　　院: ________　　　　专业/班级: ________

特别提示:

① 不能直接使用习题中的结论，如需使用，请说明原因;

② 试卷及每一页答题纸均需写上学号和姓名，答题纸注明第 __ 页/共 __ 页，考试结束后一并上交。

一、设 $0 \neq z_0 \in \mathbb{C}$，$\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为一列复数。

(1) (5 分) 若 $z_k \longrightarrow z_0$，那么 $|z_k|$ 与 $|z_0|$、$Arg\,z_k$ 与 $Arg\,z_0$ 之间分别有什么关系? 给出结论并说明原因。

(2) (5 分) 若 $z_0 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 且 $z_k \longrightarrow z_0$，证明: $arg\,z_k \longrightarrow arg\,z_0$。

二、设 $f(z)$ 是区域 $D \subset \mathbb{C}$ 中的全纯函数，$z_0 \in D$ 且 $f'(z_0) \neq 0$.

(1)(5 分) 证明:存在 z_0 的邻域 $U \subset D$ 与 $f(z_0)$ 的邻域 $V \subset \mathbb{C}$,使得 $f(z): U \longrightarrow V$ 为双射。

(2) (5 分) 证明: 逆映射 $f^{-1}(z): V \longrightarrow U$ 为全纯函数。

(3) (10 分) 令 D 中的复函数 $h(z) = u(x, y) + iv(x, y)$，其中 u, v 分别为实部和虚部，若它们之间满足关系 $u = \sin v$，证明: $h(z)$ 是常数。

三、 (10 分) 设 γ 是 $\mathbb{C}$ 中经过实轴上 1 和 -1 两点的圆周，证明: γ 的内部 (不含 0) 和外部都是 *Rokovsky* 函数 $\varphi(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ 的单叶域。

四、 (10 分) 求满足下列条件的全纯函数 $f(z)$ 并给出分解过程:

(1) $f(z)$ 将区域 $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \bigcap \{z \in \mathbb{C} : |z - \sqrt{3}i| < 2\}$ 映射为 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;

(2) $f(\sqrt{3}i) = 0$，$f'(\sqrt{3}i) > 0$.

五、(1) (15 分) 计算积分:

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)},\ 0<r\neq 1,\ 2.$$

六、设 $D\subset\mathbb{C}$ 为单连通区域，$f(z)\in H(D)$.

(1) (5 分) 若 $f(z)$ 无零点，证明：存在 D 中的单值全纯函数 $h(z)$ 使得 $f=h^2$.

(2) (10 分) 若 $f^2(z)-1$ 无零点，证明：存在 D 中的单值全纯函数 $h(z)$ 使得 $f=\cos h$.

七、(10 分) 设 $f(z)$ 是整函数，当 z 不在虚轴上时，$|f(z)|\leq|Rez|^{-\frac{1}{2}}$，证明：$f(z)$ 是常数。

八、(10 分) 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 都是区域 D 中的解析函数，且在 D 中满足 $f(z)\cdot g(z)\equiv 0$，证明：$f(z)\equiv 0$ 或 $g(z)\equiv 0$.