现代偏微分课程测试一

1. (20 分) (1). 设 $B_1 \subset \mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} \Delta u = |x|^2 - 1, & in\ B_1 \\ u = 0, & on\ \partial B_1 \end{cases} \tag{1}$$

试求 $u(0)$.

(2). 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界光滑区域,

$$\begin{cases} \Delta u = f, & in\ \Omega^c \\ u = g, & on\ \partial\Omega \\ u = o(1), & |x| \to \infty \end{cases} \tag{2}$$

求证该方程解唯一.

2. (20 分) (1). $\Delta u + \Sigma_i \lambda_i u_i + u^\alpha = 0,\ in\ \mathbb{R}^n,\ n \geq 2, u \geq 0, 1 \leq \alpha \leq \frac{n}{n-1}$, λ_i 为常数，求证 $u \equiv 0$.

(Hint: 采用 Serrin 技巧，乘 η^r 并积分，这里 η 是截断函数.)

(2). 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是星形域, $\partial\Omega \in C^1$ 若 $p > \frac{n+2}{n-2}$, 求证:

$$\begin{cases} \Delta u + u^p = 0, & in\ \Omega \\ u = 0, & on\ \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

的经典解 $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $u > 0$ 不存在.

(Hint: 乘 $x \cdot \nabla u$ 并积分.)

3. (30 分) 设

$$\begin{cases} \Delta u = f, & in\ \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + u = g, & on\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

(a). 求证: $|u|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(diam(\Omega),\ |f|_{L^\infty},\ |g|_{L^\infty})$.

(b). 求证: $|Du|_{L^\infty(\Omega')} \leq C(\Omega',\ \Omega,\ f,\ g), \forall \Omega' \subset\subset \Omega$.

(c). 求证:$|Du|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\Omega,\ f,\ g)$.

4. (10 分) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是有界凸区域，$u > 0$, $\lambda_1 > 0$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u = 0, & in\ \Omega \\ u = 0, & on\ \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

若 $v = -logu$ 凸, 求证 $D^2 v$ 的秩为常数.

5. (20 分) 设 $\Delta u = f$, 则对 $R > 1$ 有下列不等式成立:

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}} |Du|^2\, dx \le C_n \int_{B_R} (u^2 + f^2)\, dx;$$

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}} |D^2 u|^2\, dx \le C_n \int_{B_R} (u^2 + f^2)\, dx.$$

6. (10 分) 已知 $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n$, $u > 0$, 求证: $\sup\limits_{B_R(0)} |Dlogu| \le \frac{C(n)}{R}$.

7. (10 分) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是有界区域，若 $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 满足 $\sum_{i,j=1}^{2}[(1 + |Du|^2)\delta_{ij} - u_i u_j]u_{ij} = 0$, 则 $\phi = |Du|^2$ 的最大值在边界 $\partial\Omega$ 达到.