中 国 科 学 技 术 大 学

2023 – 2024 学年第二学期期中考试试卷

课程名称 线性代数(A1)　　课程编号 MATH1004.01

考试时间 2024年04月27日　　考试形式 闭卷

学院 ________　姓名 ________　学号 ________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
复评人							

答题时不要超过此线

注意事项：

1. 答题前，考生务必将所在院系、姓名、学号等填写清楚。
2. 请考生在答卷纸左侧留出装订区域。

得分	评卷人

一、填空题（每个空格5分，共25分）结果需化简.

1. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. 则$A^{-1}=$ ________, $A^n=$ ________.

2. 矩阵$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\-1&0&-1&1\\-1&1&0&-1\\-1&-1&1&0\end{pmatrix}$的伴随矩阵$A^*=$ ________.

3. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$. 则$\det(A^TA)=$ ________.

4. 三维空间中三个不同平面 $\pi_i: a_ix+b_iy+c_iz=d_i,\ i=1,2,3$ 相交于一条直线的充要条件是 ________.

得分	评卷人

二、判断题（判断下列命题是否正确，并简要说明理由。每小题5分，共20分）

1. 存在$n = 2024$阶实方阵A，使得$A^2 = -I_n$.

2. 设A, B, C为矩阵. 则由$AB = AC$可以推出$B = C$ 当且仅当A为列满秩.

3. A为$m \times n$阶矩阵. 则线性方程组$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$有非零解当且仅当线性方程组$A^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$有非零解.

4. 对于任意矩阵A和正整数$k \le \operatorname{rank}(A)$, A都存在k阶可逆子矩阵.

得分	评卷人

三、（本题10分）

求所有2阶复方阵A, 满足$\overline{A}^T A = A\overline{A}^T$.

答 题 时 不 要 超 过 此 线

得分	评卷人

四、（本题20分）

设$n(n \geq 4)$阶方阵$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. 求A的行列式;
2. 求$A - I$的逆矩阵.

答 题 时 不 要 超 过 此 线

得分	评卷人

五、（本题15分）

设A为n阶复方阵. 证明:$A^3+I=0$当且仅当$\mathrm{rank}(A+I)+\mathrm{rank}(A^2-A+I)=n$.

答 题 时 不 要 超 过 此 线

得分	评卷人

六、（本题10分）

设$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$满足$AB^T = O$．求证：$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

参考答案和评分标准

一、填空题．每空 5 分．

1. $\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1 & 2n & n & 2n(n-1)\\ 0 & 1 & 0 & n\\ 0 & 0 & 1 & 2n\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

2. $-3A$

3. 0

4. $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix} = 2$

二、判断题．判断 1 分，理由 4 分．

1. 正确．例如 $A = \begin{pmatrix}O & I_k\\ -I_k & O\end{pmatrix}$，$k = 1012$.

2. 正确．当 A 列满秩时，$Ax = Ab$ 有唯一解 $x = b$．否则，$Ax = 0$ 有解 $x \neq \mathbf{0}$.

3. 当 $m = n$ 时，正确；当 $m \neq n$ 时，错误．只需考虑 A 是相抵标准形．

4. 正确．由 Laplace 展开定理可知 n 阶可逆方阵必有 $n-1$ 阶可逆子矩阵．

三、 设 $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$．$A^HA = AA^H \Leftrightarrow |b| = |c|$，$\overline{a}b + \overline{c}d = a\overline{c} + b\overline{d}$ 即 $\overline{(a-d)}b = (a-d)\overline{c}$. (6 分)

因此，(1) $a = d$ 且 $|b| = |c|$；(2) $b = \dfrac{e}{\overline{e}}\overline{c}$，其中 $e = a - d \neq 0$. (4 分)

四、 对 A 的第 n 列作 Laplace 展开，得 $\det(A) = 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{n-1} = \frac{1-(-1)^n}{2}$. (10 分)

$A - I = \begin{pmatrix} & 1\\ I_{n-1} & \mathbf{v}\end{pmatrix} \Rightarrow (A-I)^{-1} = \begin{pmatrix}-\mathbf{v} & I_{n-1}\\ 1 & \end{pmatrix}$，其中 $\mathbf{v} = (1, \cdots, 1, 0)^T$. (10 分)

五、 记 $X = A + I$，$Y = A^2 - A + I$.

一方面，$\operatorname{rank}(X) + \operatorname{rank}(Y) \geqslant \operatorname{rank}((A-2I)X - Y) = n$. (6 分)

另一方面，根据 Sylvester 秩不等式，$\operatorname{rank}(X) + \operatorname{rank}(Y) \leqslant \operatorname{rank}(XY) + n$. (6 分)

因此，$A^3 + I = O \Leftrightarrow XY = O \Leftrightarrow \operatorname{rank}(X) + \operatorname{rank}(Y) = n$. (3 分)

六、 对于任意实矩阵 M，有 $\operatorname{rank}(MM^T) = \operatorname{rank}(M)$. (6 分)

故 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix} = \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^T & B^T\end{pmatrix}\right) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix}AA^T & O\\ O & BB^T\end{pmatrix}$

$= \operatorname{rank}(AA^T) + \operatorname{rank}(BB^T) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$. (4 分)