2023年代数学期末考试题(五道题)

1(30分). 令q为素数, $\xi_q = e^{\frac{2\pi i}{q}}$. 求证:

(i) $\mathbb{Q}(\xi_q)/\mathbb{Q}$为Galois扩张, 且Galois群$G$同构于乘法群$\mathbb{F}_q^*$(同构于$\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$).

(ii) 写出ξ_q的极小多项式(不需要过程).

令σ为$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_q)/\mathbb{Q})$的一个生成元, 易知存在$d \in \mathbb{F}_q^*$使得$\sigma(\xi_q) = \xi_q^d$ (此时$\langle d\rangle = \mathbb{F}_q^*$, d称作q的一个**原根**). 取正整数$l|q-1$, 令$k = \frac{q-1}{l}$, $H = \langle \sigma^l\rangle \leq G$, $L = \mathrm{Inv}(H) \subseteq \mathbb{Q}(\xi_q)$为$H$的不动域.

(iii) 计算$[L:\mathbb{Q}]$以及$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

(iv) 验证$\mathbb{Q}(\sum_{j=0}^{k-1} \xi_q^{d^{lj}}) \subseteq L$.

(v) 证明: $L = \mathbb{Q}(\sum_{j=0}^{k-1} \xi_q^{d^{lj}})$. (提示: 验证$\mathbb{Q}(\sum_{j=0}^{k-1} \xi_q^{d^{lj}})$的固定子群$H' \leq H$.)

2(24分). 设V是n维k-线性空间, T为V上的线性变换, 记$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 为T 的特征多项式. 令$R = k[x]$, 赋予V 一个R-模结构

$$k[x] \times V \to V,\ f(x)\cdot v := f(T)v$$

这个模记作V^T.

(i) 说明V^T是循环R-模(存在v使得$V^T = R\cdot v$)当且仅当存在$v \in V$使得$v, Tv, \cdots, T^{n-1}v$是V的一组基, 此时写出线性变换T在这组基下对应的矩阵.

(ii) 利用主理想整环上模的分解定理说明: V^T是循环模当且仅当V^T只有一个不变因子$f(x)$(相伴意义下).

(iii) 设$f(x) = f_1(x)f_2(x)$是在$k[x]$中的一个分解, 假设f_1, f_2在$k[x]$中互素, 则存在V^T的子模V_1^T, V_2^T使得$V^T = V_1^T \oplus V_2^T$而且$f_i(x)V_i = 0, i = 1, 2$.

(iv) 类比结论(ii), 请陈述条件"V^T是半单模"对应于不变因子满足的条件(不需证明).

3(10分). 设p是一个素数, n是正整数. 证明$\mathbb{Z}/(p^n)$作为$\mathbb{Z}/(p^n)$-模是内射模.

4(30分). 设R是Noether环, M, N是有限生成R-模, $f: M \to N$是R-模同态.

(i) 证明: 如果对R的每个极大理想m, 局部化$M_m = 0$, 那么$M = 0$.

(ii) 设(R, m)是局部环, 记$k(m) = R/m$. 证明: 如果$M \otimes_R k(m) = 0$, 那么$M = 0$. (提示:用Nakayama引理)

(iii) 设(R, m)是局部环, 证明: 如果f诱导的同态$\bar{f}: M \otimes_R k(m) \to N \otimes_R k(m)$是满同态, 那么$f$是满同态.

(iv) 设(R, m)是局部环, F是有限生成**投射**R-模. 视$F \otimes_R k(m)$为$k(m)$线性空间, 取$F \otimes_R k(m)$的基$\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_t$, 设$z_i$为$\bar{z}_i$在$F$中的一个原像(关于自然同态: $F \to F \otimes_R k(m)$), 证明F是自由R-模, 且$z_1, \cdots, z_t$是F的一组基. (提示: 考虑由$z_1, \cdots, z_t$诱导的同态$R^t \to F$).

(v) 设F是有限生成**投射**R-模, 证明: 如果R是整环, 那么对R的每个极大理想m, R_m-自由模F_m的秩对所有的极大理想m都相等. 如果R不是整环, 结论是否正确, 如果不正确请举一个反例.

5(30分). 以下涉及的群表示均考虑复表示, 可以用第1题的记号.

令p, q为素数, 且满足$p|(q-1)$. 令$k=(q-1)/p$，d为q的一个**原根**. 令群$G=\langle a, b \mid a^p=b^q=1, a^{-1}ba=b^{d^k}\rangle$, 也就是$G$为$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$和$\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$的半直积.

(i) 证明: G的共轭类共有$p+k$个, 代表元分别是$1, b, b^d, \cdots, b^{d^{k-1}}, a, \cdots, a^{p-1}$, 并计算每个共轭类中元素个数.

(ii) 确定G的所有线性表示, 并计算G的所有不可约非线性表示的个数和维数.

(iii) 令$H:=\langle a\rangle$, $T:=\{H, bH, \cdots, b^{q-1}H\}$为$H$在$G$中的$q$个左陪集. G在T上的左乘作用诱导一个q维的置换表示. 计算该表示的特征标, 并将其表示为(ii)中出现的不可约表示的直和.

(iv) 令$K:=\langle b\rangle$. 证明: K的任一非平凡不可约表示(V, ρ)到G上的诱导表示$\mathrm{Ind}_K^G V$是不可约的.

(v) 计算G的任意不可约非线性表示的特征标(只需给出出在a, b的取值).