

(1) 设线性变换 A 在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & c \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix}$, 在另一组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 则 $(a, b, c) = \underline{(1, 0, 0)}$

(2) 实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的正交相似标准形为 $\underline{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}}$ ~~$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$~~

(3) 实方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 的正交相似标准形为 $\underline{\begin{pmatrix} -3 & & \\ & \frac{\pi}{2} & \\ & & \frac{\sqrt{11}}{2} \end{pmatrix}}$

1) 设 V 是区间 $[0, 1]$ 上连续函数全体按内积 $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ 构成的欧氏空间. $W = (1, x, x^2)$ 是 V 的子空间. 则函数 $f(x) = x^3$ 在 W 上的正交投影是 $\underline{\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}$

2) 设 V 是由 $\cos(x), \cos(2x), \dots, \cos(nx)$ 生成的线性空间. 则 V 的一组基 $\alpha_1 = \cos(x), \alpha_2 = \cos(2x), \dots, \alpha_n = \cos(nx)$ 的对偶基为 $\underline{f_i(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) \cos(ix) dx}$

得分	评卷人
15	

(本题 15 分) 给定矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

- 求多项式矩阵 $\lambda I - A$ 的行列式因子、不变因子、初等因子组及 Smith 标准形.
- 求 A 的 Jordan 标准形.

得分	评卷人
10	

三 (本题10分) 设 A 是有限维线性空间 V 上的线性变换, 且 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^2)$.

证明: $V = \text{Im}(A) \oplus \text{Ker}(A)$.

得分	评卷人

四 (本题20分) 设 $M := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 为线性空间 V 的一组基, A 是 V 上的线

性变换, A 在 M 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) 求线性变换 A 的特征多项式、最小多项式及Jordan标准形;
- (2) 求 A 的特征子空间;
- (3) 证明: 如果 W 是 A 的3维不变子空间, 则 W 包含 A 的所有特征子空间.

得分	评卷人
5	

式 $f(x)$ 使得 $A^T = f(A)$.

五 (本题15分) 证明: 实方阵 A 为规范方阵的充要条件是, 存在实系数多项

得分	评卷人
2	

六 (本题10分) 设 A 为 n 阶可逆实对称阵.

- (1) 若 S 为 n 阶实正定对称方阵, 证明 AS 的所有特征值都是实数;
- (2) 设 α 为 n 维实单位列向量, 令 $B = A + \alpha\alpha^T A^{-1}$, 证明 B 的所有特征值都是实数.