

数学分析A2第三次单元考试题

学生所在系: 姓名: 学号: 总分:

2022年6月24日

1. 计算下列各题 (50分):

得分

(a) 用 L 表示采用极坐标表示的双曲螺线 $r\theta = 1$ 自 $\theta = \sqrt{3}$ 到 $\theta = 2\sqrt{2}$ 的一段。计算积分

$$\int_L \frac{ds}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

(b) 设 L 表示逆时针方向的上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 计算积分

$$\int_L (x^2 + 2xy) dy.$$

(c) 计算积分

$$\int_{\Sigma} |y| \sqrt{z} d\sigma,$$

其中 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2 (z \leq 1)$.

(d) 计算积分

$$\iint_S z dx dy,$$

其中 S 为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 外侧为正向。

(e) 计算曲线积分

$$\int_L (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz,$$

其中 L 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4x (z \geq 0)$ 与曲面 $x^2 + y^2 = 2x$ 的交线, 从点 $(1, 0, 0)$ 看曲线 L , 顺时针方向为正向。

2. (15分)

得分

给定向量场 $\mathbf{v} = (2xz, 2yz^2, x^2 + 2y^2z - 1)$, 请问 \mathbf{v} 是不是一个有势场? 若是, 求出其在原点取值为0的势函数。

3. (15分)

得分

给定向量场 $\mathbf{v} = (z, x, y)$, 证明 \mathbf{v} 是无源场, 并且计算出 \mathbf{v} 的一个向量场势函数, 其各分量均为关于 x, y, z 的不超过2次的多项式。

4. (10分)

得分

设 u 是定义在 \mathbb{R}^3 上的光滑函数, \mathbf{v} 是 \mathbb{R}^3 上的光滑向量场. Ω 是 \mathbb{R}^3 的一个有界区域, 其边界 $\partial\Omega$ 是光滑曲面, 并且在 $\partial\Omega$ 上 u 为常数. 证明

$$\iiint_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \nabla u \, dx dy dz = 0.$$

5. (10分)

得分

利用Green公式计算两区域 $2x^2 + y^2 \leq 4$ 与 $x^2 + 2y^2 \leq 4$ 公共部分的面积。