

数学分析A2 第二次单元测试

学生所在系:

姓名:

学号:

总分:

2022年5月27日

一、改换累次积分的次序(每小题10分)

得分

(1) $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$ ($a > 0$).

(2) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz$ 将其积分次序 $z \rightarrow y \rightarrow x$ 改变为 $x \rightarrow y \rightarrow z$.

二、(10分)

得分

举例说明存在 \mathbb{R}^2 上的一个点集, 它是零测集但不是零面积集.

三、(10分)

得分

计算积分 $\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy$, 其中 $D = \{(x,y) : x,y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

四、(10分)

得分

设单变量函数 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = 0, f'(0) = 1$,

求极限 $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^3} \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy$.

五、(10分)

得分	
----	--

求曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 和 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ ($z \geq 0, a, b, c > 0$) 所围成立体的体积.

六、(10分)

得分	
----	--

Ω 为三个坐标平面与平面 $x + y + 2z = 1, x + y + 2z = 2$ 所围成的闭区域.

计算 $\iiint_{\Omega} \frac{1}{(x+y+2z)^2} dx dy dz$.

七、(10分)

得分	
----	--

设 f 是单变量连续函数, 计算 n 重累次积分 $\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n$.

八、(12分)

得分	
----	--

计算 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} |x^2 + y^2 - x - y| dx dy$.

九、(8分)

得分	
----	--

设函数 $f(t)$ 是实数域 \mathbb{R} 上严格递增且连续的奇函数, $I = \iiint_{\Omega} f(x-y+z) dx dy dz$,

Ω 是由平面 $z = 0$, 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) 所围成的上半球体.

试判断 I 的值是大于 0, 小于 0 或者等于 0, 请给出理由.