数学分析A2 第一次单元测试

学生所在系：　　　　姓名：　　　　学号：　　　　总分：

2022 年 4 月 25 日

一、计算(给出必要的计算步骤)(每小题10分)

得分	

(1) 设$f(t)$在(a,b)内连续可导, 在区域$(a,b)\times(a,b)$内定义函数

$$F(x,y)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x\neq y,\\ f'(x), & x=y\ .\end{cases}$$

对任意$c\in(a,b)$, 求极限$\lim\limits_{(x,y)\to(c,c)}F(x,y)$.

(2) 设u和v是由方程组$\begin{cases}xu-yv=0\\ yu+xv=1\end{cases}$所确定的隐函数组, 求$u$和$v$的一阶全微分.

(3) 求函数$z=\sin^2(x^2+y^2)$在$(0,0)$处的Taylor展开式.

二、(10分)

得分	

举例说明存在$\mathbf{R}^2$上的一个函数$f(x,y)$, 使得它在原点处同时满足以下三条件：

(i) 任意方向导数都存在;

(ii) 不可微;

(iii) 不连续.

三、(10分)

得分	

证明: 曲面$F\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$的切平面通过一个固定点, 其中$a$, b, c为常数.

四、(10分) | 得分 | |

证明：由方程$y=x\varphi(z)+\psi(z)$所确定的隐函数$z=z(x,y)$满足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\ .$$

五、(20分) | 得分 | |

设函数$f(x,y)=e^{-x}(ax+b-y^2)$, 若$(-1,0)$是$f(x,y)$的极大值点, 求常数a, b满足的条件.

六、(10分) | 得分 | |

设函数$u=f(x,y,z)\in C^1(\mathbf{R}^3)$, 证明: u仅为r的函数, 其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 当且仅当对非零的x, y, z, 有$\frac{f'_x}{x}=\frac{f'_y}{y}=\frac{f'_z}{z}$成立.

七、(10分) | 得分 | |

设函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)的一个邻域U内有定义, $\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$在$U$中存在且都在$(x_0,y_0)$处可微. 证明:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)\ .$$